# 前　言

《振动理论及应用》系统地介绍了线性振动理论及其应用，旨在帮助读者掌握线性振动的基础理论、建模技能和分析计算方法，并培养对工程与机械系统进行振动分析与控制设计、解决工程中有关振动问题的能力。

本书在取材与编排上有以下特点：

1. 遵循振动学科的基本体系，在阐明振动基础理论的同时，注意理论与实际的结合。

2. 在总结多年科研与教学经验的基础上，注意吸收国内外振动领域研究的新成果；叙述上注重剖析基本概念、突出重点、分散难点，力求做到深入浅出。

3. 适当注意反映计算机振动分析中发展起来的一些新方法与新技巧。

4. 注意与相关课程间的配合与衔接，以及必要的重复运用。

本书第一章概括介绍振动系统的描述方法及解决振动问题的途径；第二章至第四章阐述单自由度线性系统的振动。这部分内容是线性振动理论的基础，每位读者都必须掌握好它。

本书在第四章以后介绍多自由度线性振动系统的矩阵分析方法以及连续系统的离散化方法。着重在介绍实模态与复模态分析技术，以及求解振动问题的常用计算方法，为读者运用现代计算、测试与分析手段来解决工程中的振动问题提供坚实的基础。

多年来在各方支持下，特别是在国家自然科学基金的资助下，开展的振动理论与应用的科研工作为本书写作积累了丰富的经验；不仅于此，本书出版也得到了西北工业大学出版基金和研究

生院的赞助。为此，对各有关科学基金和出版基金的资助表示衷心的感谢。

作者还感谢出版基金评审委员会白振林教授、陆福一教授的宝贵意见和建议。

在本书编写过程中，还得到了张天舒副教授、章卫国副教授的大力帮助，作者对此深表谢意。

二位作者都感谢各自的家人们对本书编写工作的理解和支持，没有这些，本书也是难以完成的。

本书可供航空、宇航、海洋、机械、土建、交通、能源等工程领域的科技人员参考，也可作为有关专业的研究生、本科生教材。

由于作者水平所限，书中不妥之处在所难免，敬请广大读者不吝指正！

方同　薛璞

1997年6月于西安

# 目　　录

# 第一章 绪 论

## 1.1 概 述

**振动**是指物体经过它的平衡位置所作的往复运动或系统的物理量在其平均值(或平衡值)附近的来回变动。振动是自然界最普遍的现象之一。大至宇宙,小至亚原子粒子,无不存在振动。各种形式的物理现象,诸如声、光、热等都包含振动。人们生活中也离不开振动:心脏的搏动、耳膜和声带的振动,都是人体不可缺少的功能;人的视觉靠光的刺激,而光本质上也是一种电磁振动;生活中不能没有声音和音乐,而声音的产生、传播和接收都离不开振动。在工程技术领域中,振动现象也比比皆是。例如,桥梁和建筑物在阵风或地震激励下的振动,飞机和船舶在航行中的振动,机床和刀具在加工时的振动,各种动力机械的振动,控制系统中的自激振动等。

在许多情况下,振动被认为是消极因素。例如,振动会影响精密仪器设备的功能,降低加工精度,加剧构件的疲劳和磨损,从而缩短机器和结构物的使用寿命。振动还可能引起结构的大变形破坏,有的桥梁曾因振动而坍毁;飞机机翼的颤振、机轮的抖振往往造成事故;车、船和机舱的振动会劣化乘载条件;强烈的振动噪声会形成严重的公害。

然而,振动也有它积极的一面。例如,振动是通信、广播、电视、雷达等工作的基础。50年代以来,陆续出现许多利用振动的生产

装备和工艺。例如，振动传输、振动筛选、振动研磨、振动抛光、振动沉桩、振动消除内应力等。它们极大地改善了劳动条件，成十倍、成百倍地提高了劳动生产率。可以预期，随着生产实践和科学研究的不断进展，振动的利用还会与日俱增。

各个不同领域中的振动现象虽然各具特色，但往往有着相似的数学力学描述。正是在这种共性的基础上，有可能建立某种统一的理论来处理各种振动问题。振动学就是这样一门基础学科，它借助于数学、物理、实验和计算技术，探讨各种振动现象的机理，阐明振动的基本规律，以便克服振动的消极因素，利用其积极因素，为合理解决实践中遇到的各种振动问题提供理论依据。

## 1.2 振动系统分类

机械振动是指机械系统（即力学系统）中的振动。任何力学系统，只要它具有弹性和惯性，都可能发生振动。这种力学系统称为振动系统。振动系统可分为两大类，**离散系统**和**连续系统**。连续系统具有连续分布的参量，但可通过适当方式化为离散系统。

按自由度划分，振动系统可分为**有限多自由度**系统和**无限多自由度**系统。前者与离散系统相对应，后者与连续系统相对应。

离散系统由集中参量元件组成。力学系统中的集中参量元件有三种：**质量**、**弹簧**和**阻尼器**。它们都是理想化的力学模型。质量（包括转动惯量）是只具有惯性的力学模型。弹簧是不计本身质量、只具有弹性的“模型”；弹性力和形变一次方成正比的弹簧，称为线性弹簧。阻尼器模型既不具有惯性，也不具有弹性。它是耗能元件，在运动时产生阻力；阻力与速度一次方成正比的阻尼器，称为线性阻尼器。

离散系统在工程上有广泛的代表性。例如，固定在混凝土基础上的精密机床，基础下面还铺有弹性衬垫（图 1.1）。进行隔振分析

时，需要考察机床和基础的整体振动。这时，考虑到机床和基础的弹性远比衬垫小得多，故可略去其弹性而把它们视为集中质量；另一方面，衬垫的质量远比机床和基础的质量小得多，可以略去，而把衬垫看做弹簧；而衬垫本身的内摩擦以及基础和周围约束之间的摩擦起着阻尼的作用，可以把它们合在一起看做是一个阻尼器。因而，在隔振分析中，这一系统可简化为离散系统（图1.2）。当然，在分析机床本身的振动或机床、工件、刀具系统的振动时，必须考虑机床本身的弹性。通过适当简化，机床本身又可看做一个离散系统。离散系统的运动，数学上用常微分方程描述。

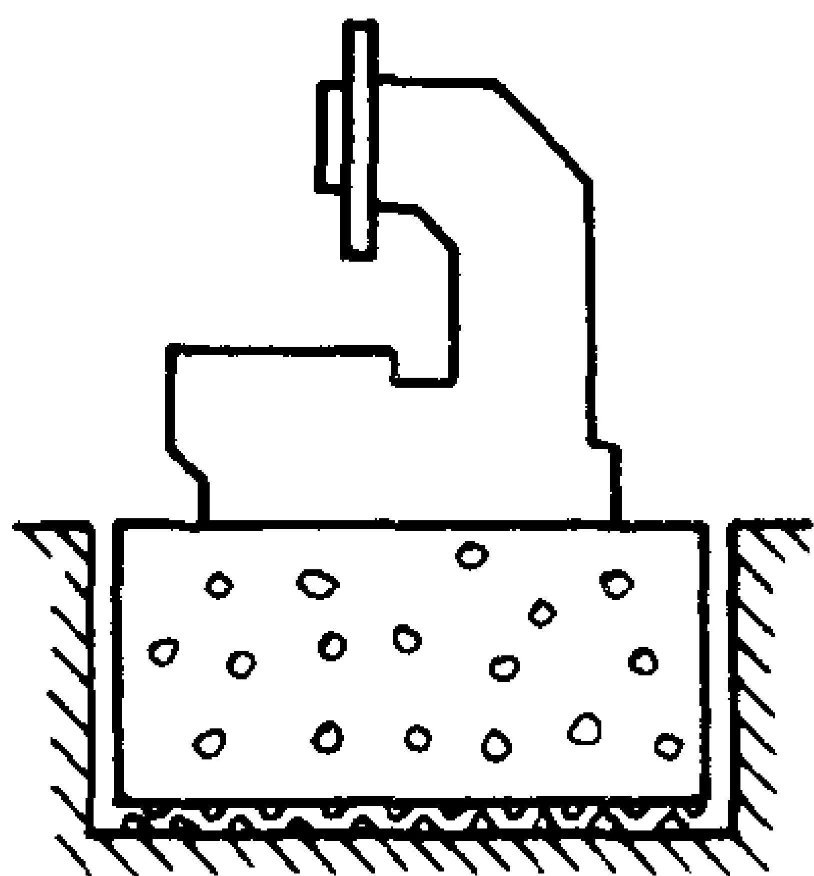


图1.1 铺有弹性衬垫的机床混凝土地基

连续系统是由弹性体元件组成的。弹性体可以看做由无数质点组成。各质点间有弹性联系，只要满足连续性条件，任何微小的相对位移都是可能的。因此，一个弹性体有无限多个自由度。典型的弹性体元件有杆、梁、轴、板、壳等。

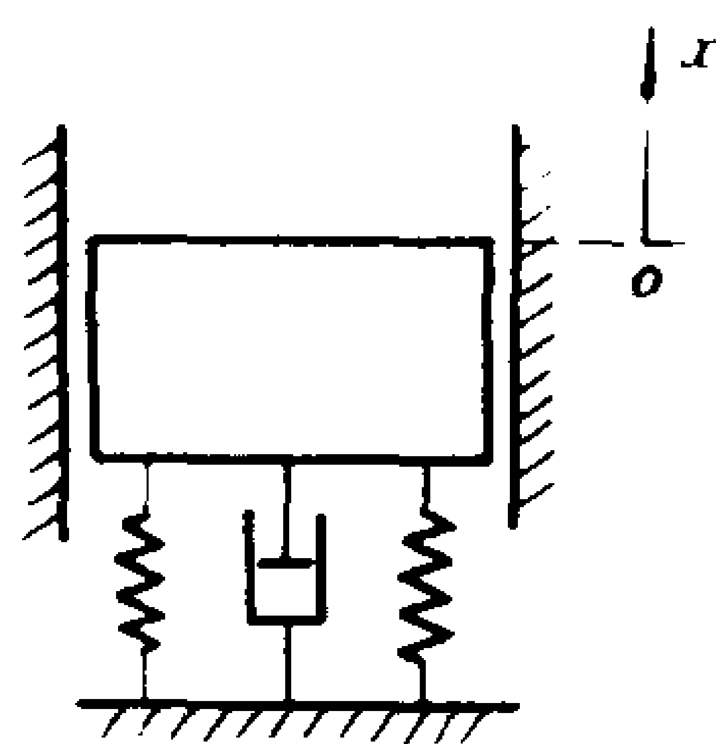



图1.2 简化成离散系统

弹性体的惯性、弹性与阻尼是连续分布的，故称连续系统。工程上许多振动系统取连续系统的模型。例如，涡轮盘通常取为变厚度的圆板，涡轮叶片通常取为变截面

的梁或壳等。连续系统的运动,数学上用偏微分方程描述。

参量的变化规律可用时间的确定函数描述的振动系统,称为**定则系统**(又称**确定性系统**)。如果系统中的各个特性参量(质量、刚度、阻尼系数等)都不随时间而变,即它们不是时间的显函数,就称这系统为**常参量系统**(**定常系统**);反之,则称为**变参量系统**(**非定常系统**)。常参量系统的运动用常系数微分方程描述。而描述变参量系统需要用变系数微分方程。

若系统参量变化无常,无法用时间的确定函数描述,而只能用有关统计特性描述,这种系统就称为**随机系统**。

一个质量不随运动参量(坐标、速度、加速度等)的变化而变化,且其弹性力与阻尼力都可以简化为线性模型的振动系统称为**线性系统**。线性系统的运动用线性微分方程描述。凡是不能简化为线性系统的振系都称为**非线性系统**。

严格地说,实际振动系统的弹性力和阻尼往往不符合线性模型。但在许多情况下,只要系统振幅不大,从线性弹簧和线性阻尼的假设出发,常可得出足够准确的有用结论。但也有不少振动过程,如果不考虑非线性因素,就无法说明有关现象;各种自激振动现象就是最典型的例子。为方便起见,有时故意引入一些非线性因素来达到预期的目的。例如,采用各种限位器、继电型控制器等。在这种情况下,可以按非线性问题来处理。

一个实际振动系统应该采用何种简化模型,需要根据具体情况来确定。同一系统,在不同条件下,可采用不同模型。例如,受迫振动中阻尼的影响,在远离共振情况下可不考虑,从而能使计算大为简化。但在共振的情况下,阻尼起决定性作用,绝对不能略去。又如在计算简支梁的最低阶固有频率时,可假设它的一半质量集中于梁的中点处,由此可得到很准确的结果,而在研究梁受冲击荷载引起的响应时,上述假设将导致错误的结论。因此,所采用模型的正确与否,还得由实践加以检验。

综上所述,振动系统的分类如图 1.3 所示。

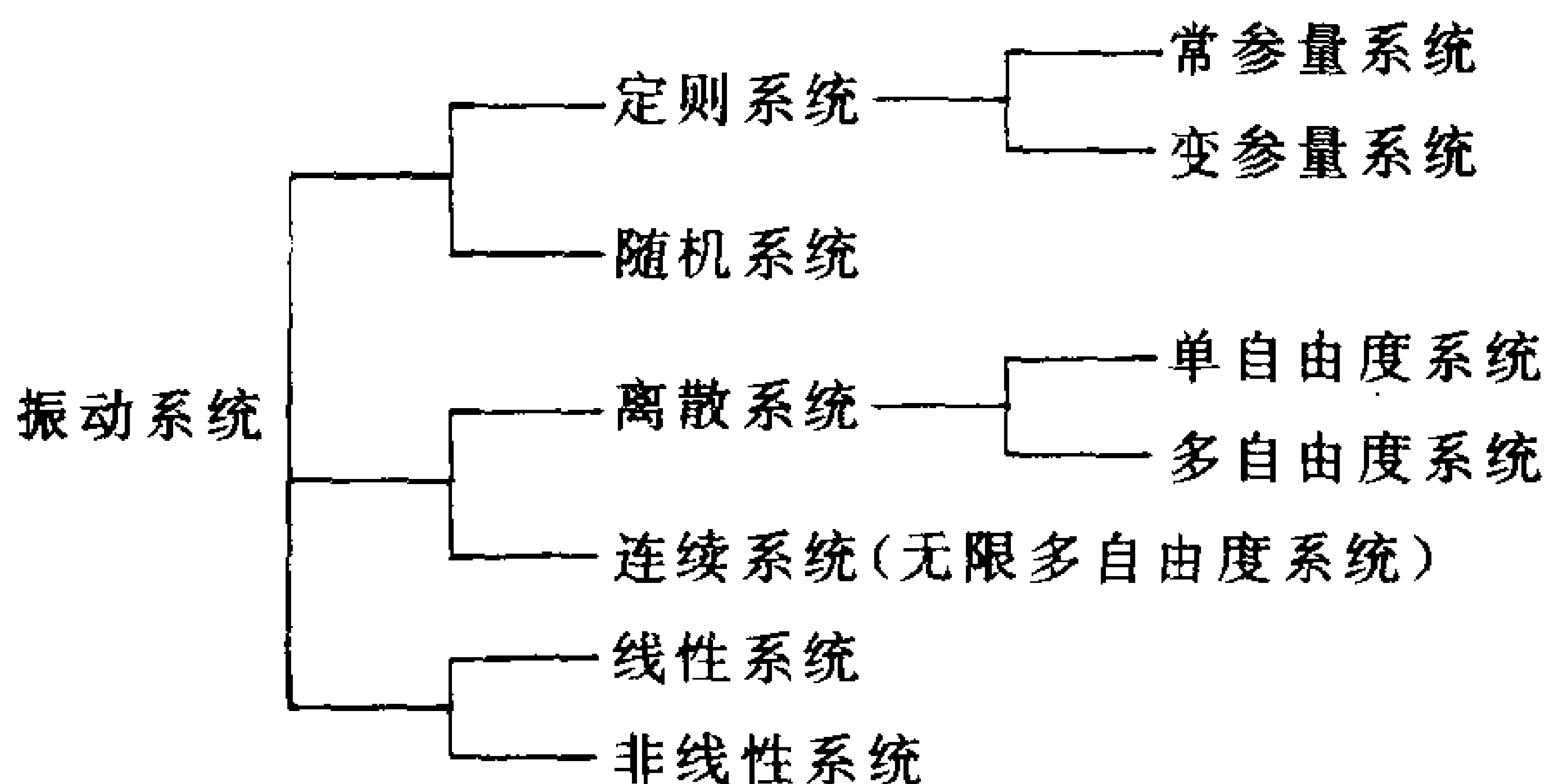



图 1.3　振动系统的分类

本书采用的系统模型限于定则、定常、线性、离散或连续的模型。

## 1.3　振动形式分类

一个系统受到激励,会呈现一定的响应。激励作为系统的输入,响应作为系统的输出,二者与系统特性的联系如图 1.4 所示。系统的激励可分为两大类:**定则激励**和**随机激励**。

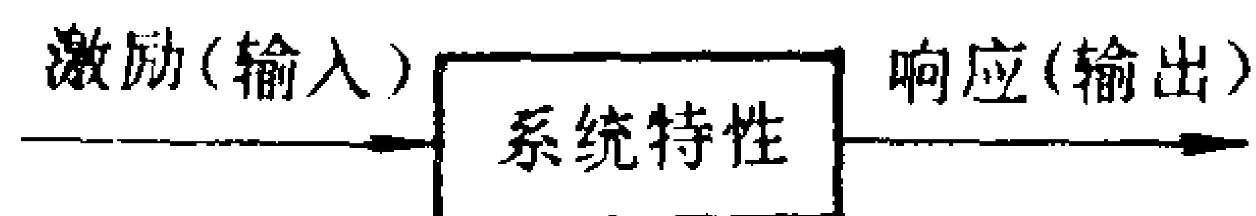



图 1.4　激励、响应和系统特性关系

可用时间确定函数来描述的激励称为定则激励。脉冲激励、阶跃激励、谐和激励、周期激励都是典型的定则激励。一个定则系统受到激励时,响应也是定则。这类振动称为**定则振动**。

随机激励则不能用时间的确定函数描述,但它们具有一定的

统计规律性，可用随机函数描述。即使是定则系统，在受到随机激励时，系统的响应也会是随机的。这类振动称为**随机振动**。

此外，振动还可以按激励的控制方式分为四类：① **自由振动**：通常指弹性系统在偏离平衡状态后，不再受到外界激励的情形下所产生的振动；② **强迫振动**：指弹性系统在受外界控制的激励作用下发生的振动。这种激励不会因振动被抑制而消失。③ **自激振动**：指弹性系统在受系统振动本身控制的激励作用下发生的振动。在适当的反馈作用下，系统会自动地激起定幅振动。一旦振动被抑制，激励也随之消失。④ **参激振动**：指激励方式是通过周期地或随机地改变系统的特性参量来实现的振动。归纳起来，振动形式的分类如图 1.5 所示。

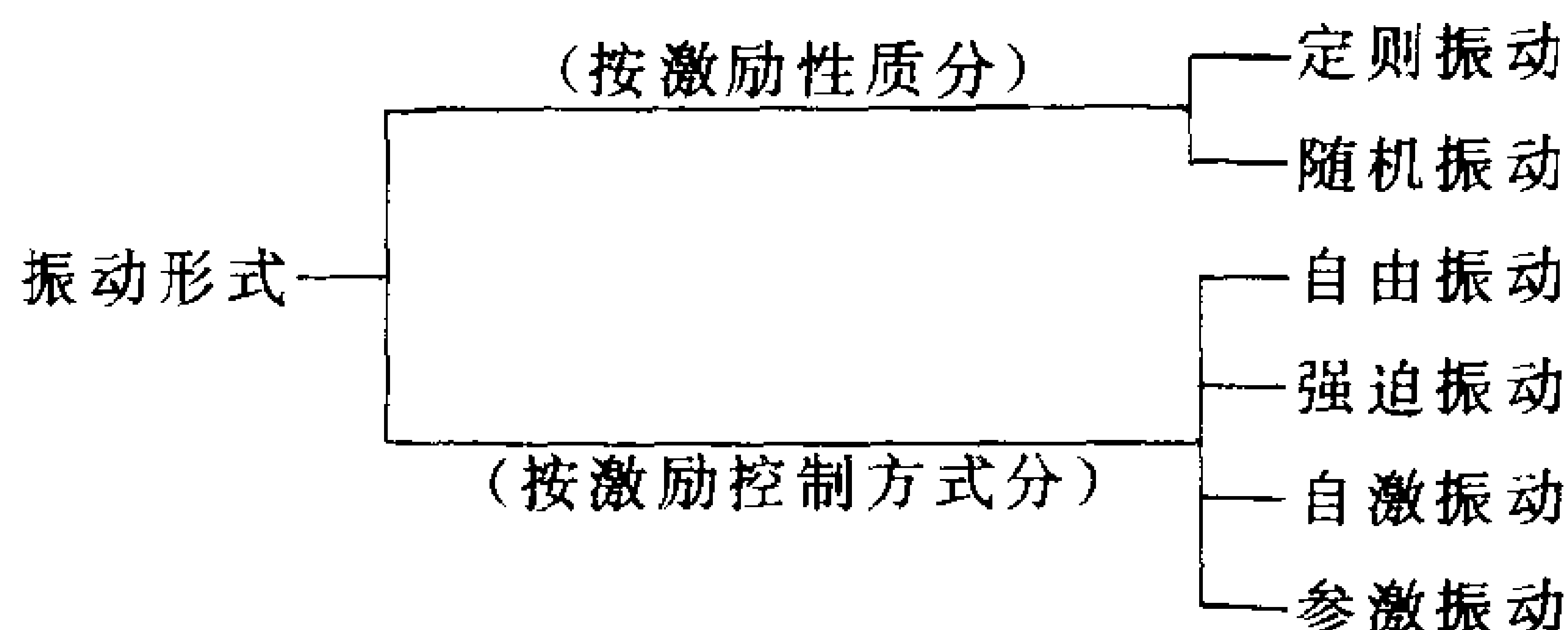



图 1.5 振动形式的分类

本书仅限于考察确定性激励下的自由与受迫振动。

## 1.4 研究方法

对于定则系统或随机系统的振动问题，一般都是已知激励、响应、系统特性中的二者而求第三者。在激励条件和系统特性已知的情况下，求系统的响应，称为**振动分析**。在系统特性和响应已知的情况下，反推系统的激励，称为**振动环境预测**。在激励和响应均为已知的情况下，确定系统的特性，称为**振动特性测定**或**系统识别**。

还有另一种提法是**振动综合或振动设计**，即在一定的激励条件下，如何确定系统的特性，使系统的响应满足指定的条件。

实际振动问题往往错综复杂，它可能同时包含识别、分析、综合等几方面的问题。通常将实际问题抽象为力学模型，实质上是系统识别问题。针对系统模型列式求解的过程，实质上是振动分析的过程。分析并非问题的终结，分析的结果还必须用于改进设计或排除故障（实际的或潜在的），这就是振动综合或设计的问题。

解决振动问题的方法不外乎通过理论分析和实验研究，二者是相辅相成的。在振动的理论分析中大量应用数学工具，特别是数字计算机的日益发展，为解决复杂振动问题提供了强有力的手段。从 60 年代中期以来，振动测试和信号分析技术有了重大突破和进展，这又为振动问题的实验、分析和研究开拓了广阔的前景。

本书着重阐述振动的基本理论与分析方法，并结合实际说明其应用前景。完全掌握这些内容也就初步具备解决实际振动问题的能力，并为进一步开展研究工作打下了良好的基础。

# 第二章　1自由度线性系统(一)——自由振动

## 2.1 引　　言

本章及随后的两章考察最简单的、也是最基本的振动系统——1自由度线性系统。本章讨论它的自由振动。所谓**自由振动**是指系统受初始扰动后,仅靠弹性恢复力来维持的振动。分析指出,在不计阻尼的情形下,系统的自由振动是简谐运动。它是振动的一种最基本的形态,简称**谐振动**。谐振动的三个特征量是**振幅**、**频率**与**相位**。无阻尼线性振系的自由振动频率仅仅决定于系统的惯性与弹性,它表征系统固有的一种振动特性,称为**固有频率**。系统自由振动的振幅与相位则取决于运动的初始条件。通常取激扰终了时刻作为自由振动的起始时刻,初始条件就是指这一时刻系统的运动参数——位移与速度。在不计阻尼的前提下,系统在自由振动中满足机械能守恒原理,由此得出谐振动这一重要概念,它贯穿整个振动分析中。

在阻尼不容忽视的情形下,系统在自由运动中机械能不再守恒,而是随着运动不断耗散。理论分析中,通常假定阻尼力大小与速度成正比,即采用线性阻尼的模型。根据阻尼的大小,系统的自由运动呈现两种不同的形式:振动的与非振动的。在这两种形式之间存在着一个过渡状态,它也是非振动的。对应于这一过渡状态的阻尼,称为**临界阻尼**。只有当系统的阻尼低于临界阻尼时,系统才

会发生自由振动。这种自由振动的振幅是按指数规律衰减的。减幅率可以用来度量系统阻尼的大小。

## 2.2 谐振子与谐振动

无阻尼的1自由度线性系统可以用图2.2.1所示质量-弹簧模型系统来表示。只能在光滑水平面上沿直线运动的质量 $m$,由弹簧 $k$ 连接于固定支点,弹簧在未变形时长为 $l$,它的轴线沿运动方向,弹簧本身的质量可略去不计。系统的的静平衡位置就是弹簧没有变形的位置。取平衡时质量 $m$ 的位置作为坐标原点,沿运动方向取坐标轴 $x$(向右为正),则系统在任一瞬时的位置都可由质量 $m$ 的坐标 $x$ 完全确定,所以这是1自由度系统。

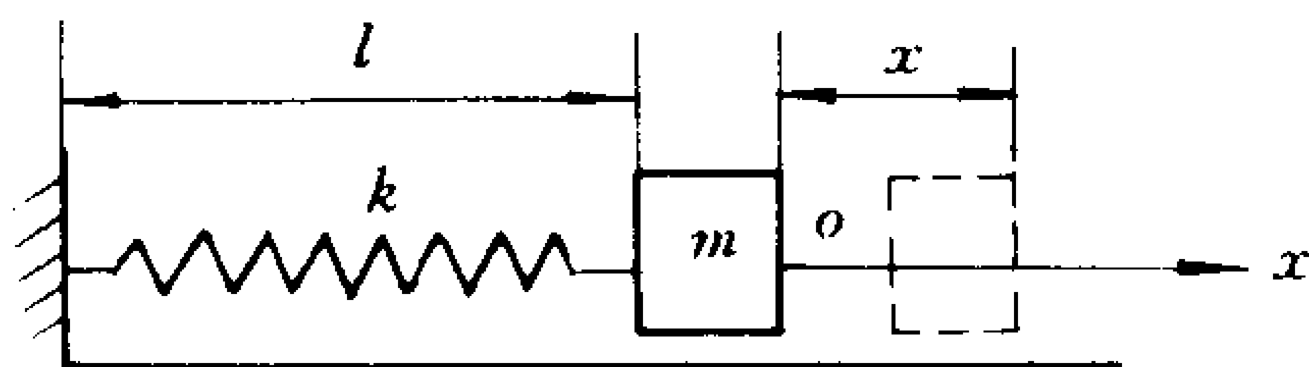


图 2.2.1 无阻尼1自由度线性系统

自由运动中,质量 $m$ 在水平方向仅受弹簧力的作用。当质量 $m$ 位于原点 $o$ 时,弹簧力等于零。当质量 $m$ 位于平衡位置右侧,即 $x>0$ 时,弹簧受拉伸,作用于质量 $m$ 上的弹簧力向左。当质量 $m$ 位于平衡位置左侧,即 $x<0$ 时,弹簧受压缩,作用于质量 $m$ 上的弹簧力向右。可见,不论在哪个位置上,质量 $m$ 所受的弹簧力总是力图使它返回平衡位置,所以这种力称为恢复力。假设弹簧力大小与变形成正比,比例常数为 $k$,这种弹簧力称为线性恢复力。比例常数 $k$ 称为弹簧刚度,大小就等于使弹簧产生单位变形(伸长或缩短单位长度)所需的力,量纲为 $MT^{-2}$,在国际单位制中表示为N/m。图2.2.1所示系统,在运动中只受线性力的作用,所以是线性系统。又系统中表征惯性的质量 $m$ 以及表征弹性的刚度 $k$ 都是常数,所以这一系统是常参数系统。

设上述系统原来处于静平衡状态，由于受到某个扰动而打破了平衡状态，系统获得了初始位移或初始速度，或者两者都有。系统进入运动状态后，当质量 $m$ 偏离平衡位置时，弹性恢复力力图使它返回平衡位置，而当质量 $m$ 到达平衡位置时，又因为具有一定的动能，惯性使得它不可能停留在平衡位置上。于是，系统只能在平衡位置附近往复运动。要定量地确定这种运动规律，必须先列出系统的运动微分方程。

设在任一时刻 $t$，质量 $m$ 的位移为 $x$，取质量 $m$ 为分离体，这时，作用于质量 $m$ 的水平力只有弹簧力，它在 $x$ 轴上的投影可表示为 $-kx$。于是，由牛顿定律有

$$m\ddot{x} = -kx$$

式中 $\ddot{x}$ 表示 $x$ 的二阶时间导数，即质量 $m$ 的加速度在 $x$ 轴上的投影。引入记号 $p^2 \equiv \frac{k}{m}$，上式可写成

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \tag{2.2.1}$$

它是变量 $x$ 的二阶常系数线性齐次常微分方程。它描述质量 $m$ 在时刻 $t$ 的微分运动规律。要确定 $x$ 随时间 $t$ 的变化规律必须对方程(2.2.1)进行积分。由常微分方程理论可知，方程(2.2.1)的通解可表示为

$$x = B\sin pt + D\cos pt \tag{2.2.2}$$

其中 $B$ 与 $D$ 是任意常数。方程(2.2.1)对应于特定初始条件的解可确定如下：设在初始时刻 $t=0$ 时，质量 $m$ 有初位移 $x = x_0$ 以及初速度 $\dot{x} = \dot{x}_0$，则由式(2.2.2)及其一阶导数式

$$\dot{x} = Bp\cos pt - Dp\sin pt$$

有

$$x_0 = D, \quad \dot{x}_0 = Bp$$

由此得

$$x = \frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt + x_0\cos pt \equiv x_1 + x_2 \tag{2.2.3}$$

它描述系统对应于上述初始条件的自由振动。在式(2.2.3)中令

$$\frac{\dot{x}_0}{p} = A\cos\varphi, \quad x_0 \equiv A\sin\varphi$$

则式(2.2.3)可改写为

$$x = A\sin(pt + \varphi) \tag{2.2.4}$$

其中

$$A \equiv \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2}, \quad \varphi \equiv \arctan\frac{px_0}{\dot{x}_0} \tag{2.2.5}$$

且有

$$p \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.2.6}$$

人们常把正弦函数与余弦函数统称谐和函数(也称简谐函数)。由式(2.2.3)与式(2.2.4)可见,1自由度线性系统的自由振动可以用时间的简谐函数来描述,故称为**简谐振动**或**谐振动**。相应地,无阻尼的1自由度线性系统也称**谐振子**。

式(2.2.4)中的$A$称为**振幅**,它是质量$m$偏离平衡位置的最大距离。$p$称为**角频率**,$\varphi$称为**初相角**。振幅、角频率、初相角是谐振动的三个重要特征量。

式(2.2.3)与式(2.2.4)中各个谐和函数对时间的展开曲线,如图2.2.2($b$)所示。图中纵坐标取为$x$(或$x_1$, $x_2$),曲线①代表$x_0\cos pt$,曲线②代表$\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt$,而由曲线①与②叠加而得的曲线③即代表$x$。注意,谐和函数可用旋转矢量在相应坐标轴上的投影来表示。在图2.2.2($a$)中画出了与上述各曲线相应的旋转矢量。与曲线①相应的矢量为$\overline{OP}$,长度为$|x_0|$,与曲线②相应的矢量为$\overline{OQ}$,长度为$\left|\frac{\dot{x}_0}{p}\right|$,$\overline{OP}$与$\overline{OQ}$的合成矢量$\overline{OR}$则与曲线③相对应,长度为$A$。在初始时刻$t=0$时,$\overline{OP}$与纵坐标轴重合,$\overline{OQ}$与横坐标轴重合,而$\overline{OR}$与横坐标轴之间的夹角为$\varphi$。上述三个矢量均以角速

度 $p$ 同步旋转。不难验证，这三个矢量在 $x$ 轴上的投影满足式(2.2.3)。由此可见，谐振动的初相角 $\varphi$ 就是相应旋转矢量的初相角。而角频率 $p$ 就是这一旋转矢量的角速度。所以，$p$ 的单位与角速度相同，即为“弧度每秒”，或记为 rad/s。

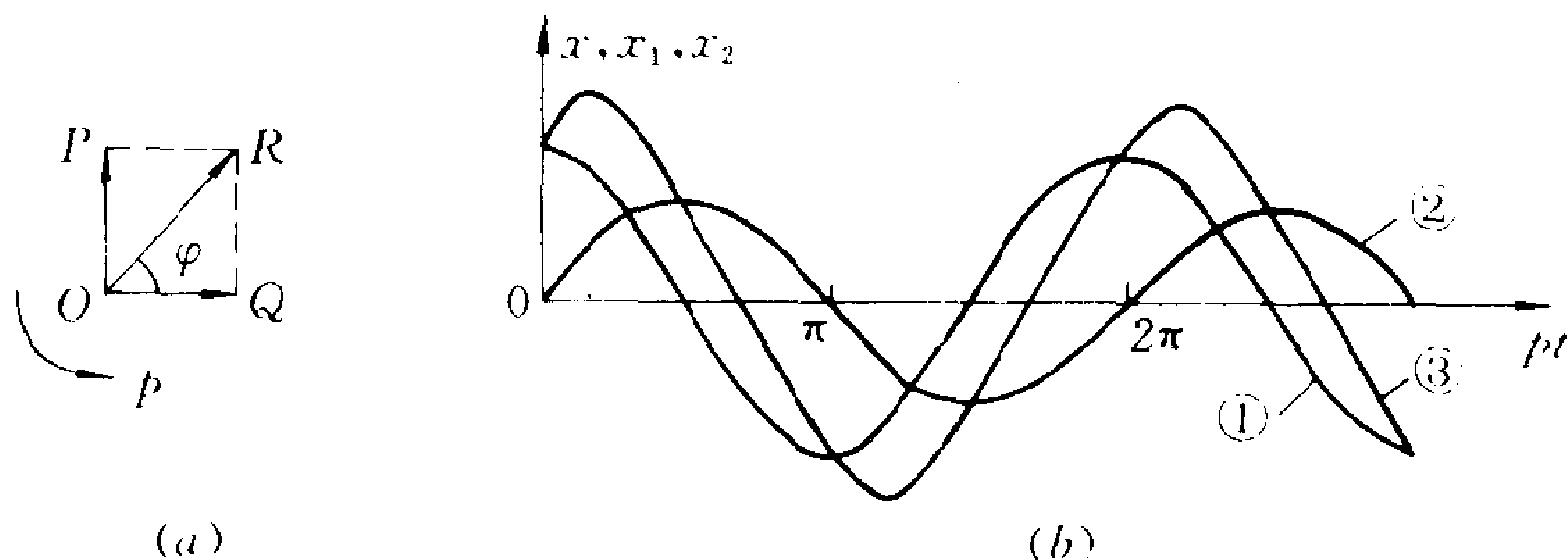



图 2.2.2 谐振动及相应的旋转矢量表示

从式(2.2.5)可以看到，谐振动的振幅 $A$ 与初相角 $\varphi$ 依赖于初始条件 $x_0$ 与 $\dot{x}_0$。而从式(2.2.6)可以看到，角频率 $p$ 与初始条件无关，仅取决于系统的刚度与质量。所以，人们常称 $p$ 为系统的固有(角)频率，以强调它是系统的一种固有的振动特性。

从图 2.2.2($a$)可见，每当旋转矢量转过一周，即相角增加 $2\pi$，$x$ 值的变化就重复一次。将上述矢量旋转一周所需的时间记为 $T$，则由 $pT = 2\pi$，可得

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{R}} \qquad (2.2.7)$$

谐振动重复一次所需的这一时间 $T$，称为振动的**周期**。它的单位通常取为 s。周期的倒数，即单位时间(1 s)内振动的重复次数，称为**频率**，记为 $f$，则有

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{p}{2\pi} \qquad (2.2.8)$$

频率的单位为 $s^{-1}$，称为赫兹(Hz)，或简称赫。

从式(2.2.7)与(2.2.8)可见，系统的周期 $T$ 与频率 $f$ 亦仅仅取决于系统的物理参数 $k$ 与 $m$，所以，人们也常称 $T$ 与 $f$ 为系统的固有周期与固有频率。

角频率 $p$ 与频率 $f$ 之间只差一个常数因子，即有

$$p = 2\pi f$$

$p$ 也称圆频率。以后在不致混淆的场合下，我们将简称 $p$ 为频率。

从周期与频率的公式可见，振系的质量 $m$ 愈大，弹簧的刚度 $k$ 愈小，则系统固有频率愈低，周期愈长。反之，质量 $m$ 愈小，刚度 $k$ 愈大，则系统固有频率愈高，周期愈短。这个结论，对于振动系统的修改设计非常有用。

以上我们讨论了谐振子在水平面内的运动，这时，重力与水平面的反力相平衡，重力对运动不起作用。如果上述谐振子处于光滑斜面上或处于铅垂悬挂状态，那末重力会有什么影响呢?要回答这一问题，只需考察图2.2.1所示系统在 $x$ 轴方向受一常力 $F$ 作用的情形，如图2.2.3所示。

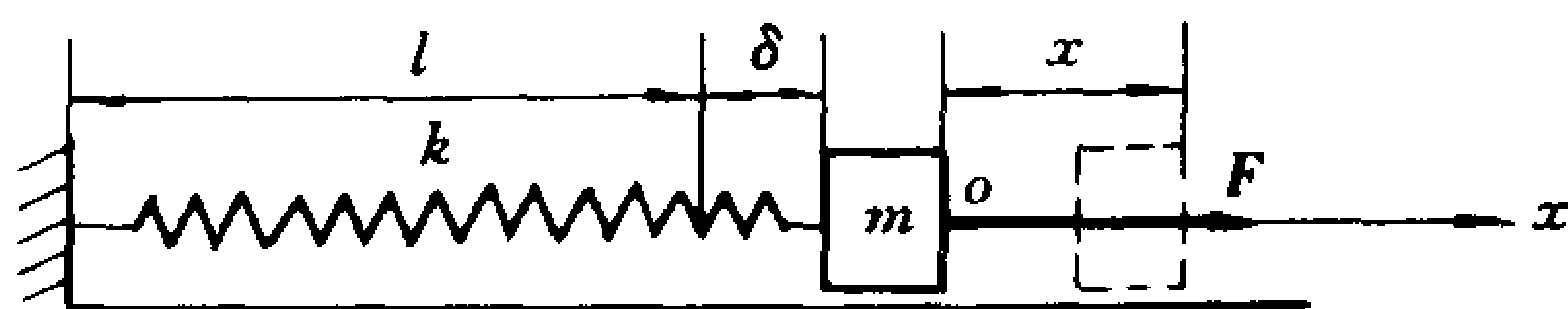



图2.2.3　沿 $x$ 轴向受常力作用的情形

这时，在静平衡状态下，弹簧的静变形 $\delta$ 为

$$\delta = \frac{F}{k} \tag{2.2.9}$$

将这一平衡位置作为原点，取水平轴 $x$。当质量 $m$ 位于 $x$ 处时，弹簧的变形为 $\delta + x$($x$ 为代数量)，弹簧力在 $x$ 轴上的投影可表示为 $-k(\delta + x)$。故由牛顿定律，质量 $m$ 的运动微分方程可列为

$$m\ddot{x} = F - k(\delta + x)$$

考虑到式(2.2.9),上述方程化为

$$m\ddot{x} = -kx$$

也就是说,它与不受常力时的运动微分方程形式完全一样,只是坐标原点有所变动而已。由此得出结论:只要取质量 $m$ 的静平衡位置作为坐标原点,就可以不必考虑常力以及弹簧的静变形,而前面的讨论及所得结果完全适用于这一情形。

将这一结论应用于铅垂悬挂的谐振子,这时,常力 $F = mg$,故有

$$\delta = \frac{mg}{k}$$

或写成

$$\frac{g}{\delta} = \frac{k}{m}$$

于是,系统固有频率的公式可表示为

$$p = \sqrt{\frac{g}{\delta}} \tag{2.2.10}$$

将频率公式表示成这一形式有一定的实用意义,因为有些情况下,系统的静变形是比较容易测量的,从实测的 $\delta$ 值,便可按式(2.2.10)估算系统的固有频率。

**例 2.2.1** 机械式拾振仪的原理图如图 2.2.4 所示。支承于水平轴 $o$ 的摆 $oc$ 连接一个刚度为 $k$ 的螺线弹簧,在重力作用下摆的平衡位置偏离水平线成 $\beta$ 角。设摆在水平线上方成 $\alpha$ 角处,螺线弹簧不受力。摆的质量为 $m$,它绕 $o$ 轴的转动惯量为 $J$,摆重心 $c$ 至 $o$ 轴的距离为 $l$。摆 $oc$ 可围绕平衡位置作微幅振动,求其固有频率。

**解** 当摆处于平衡位置时,有

$$k(\alpha + \beta) = mgl\cos\beta \tag{a}$$

摆的微振动角位移记为 $\varphi$,由动量矩定理,可得摆的运动微分方程为

$$J\ddot{\varphi} = -k(\alpha + \beta + \varphi) + mgl\cos(\beta + \varphi)$$

考虑到式$(a)$，并精确到一阶小量，上式可线性化为

$$J\ddot{\varphi} + (k + mgl\sin\beta)\varphi = 0$$

因此，摆的微振动固有频率为

$$p = \sqrt{\frac{k + mgl\sin\beta}{J}}$$

当测量铅垂振动时，摆的平衡位置应设计成处于水平位置，即 $\beta = 0$。这时有

$$p = \sqrt{\frac{k}{J}}$$

当测量水平振动时，摆的平衡位置应设计成处于铅垂位置，即 $\beta = \frac{\pi}{2}$。这时有

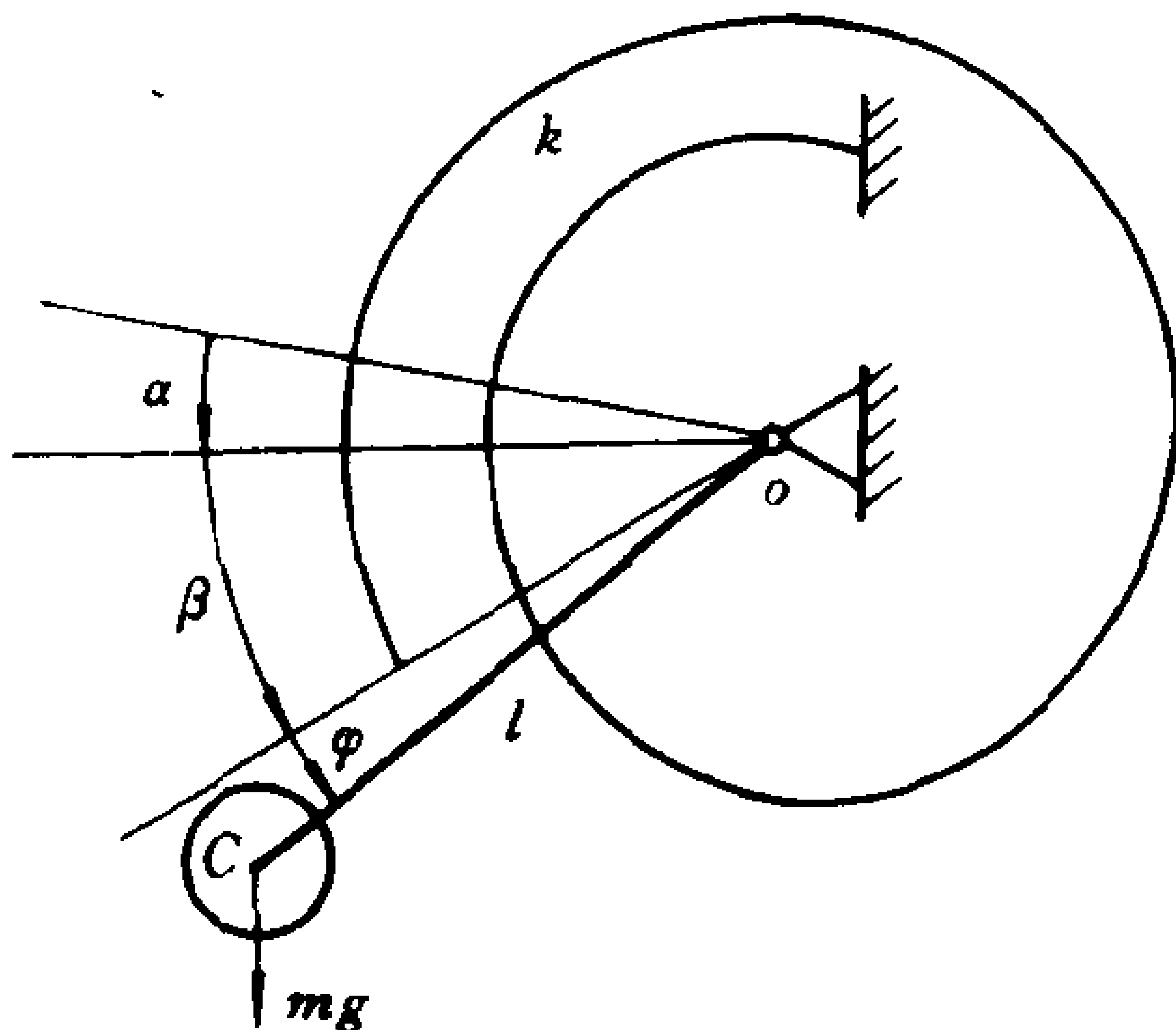



图 2.2.4　拾振仪原理图

$$p = \sqrt{\frac{k + mgl}{J}}$$

**例 2.2.2**　分析直升机旋翼模型的挥舞振动。

**解**　考虑最简化的情形，直升机转子与旋翼如图 2.2.5 所示。假设(1) 旋翼简化为长 $L$ 的均匀刚性细杆，铰支于 $o$ 轴；(2) 转子转速 $\Omega$ 为常数；(3) 重力对旋翼的作用可略去不计。

这时，取固连于转子的旋转坐标系作为基准来考察旋翼的相对运动。旋翼的相对平衡位置为水平位置。相对运动中旋翼绕定轴 $o$ 在平衡位置附近作上下挥舞振动。轴 $o$ 与转子中心之间的距离为 $R$，杆的单位长度的质量为 $\rho$。记挥舞角为 $\theta$，沿杆长方向的流动坐标取为 $\xi$。于是，旋翼微段 $d\xi$ 上的离心力为 $\Omega^2 R_1 \rho d\xi$，其中 $R_1 = R + \xi\cos\theta$。该离心力对 $o$ 轴的力矩为$(\Omega^2 R_1 \rho d\xi)(\xi\sin\theta)$，而作用于整

个旋翼上的离心力矩总和为

$$\int_0^L \rho\Omega^2\sin\theta(R+\xi\cos\theta)\mathrm{d}\xi = \rho L\Omega^2\sin\theta\left(\frac{RL}{2}+\frac{L^2}{3}\cos\theta\right)$$

当旋翼作微振动时，上式可简化为

$$\rho L\Omega^2\left(\frac{RL}{2}+\frac{L^2}{3}\right)\theta$$

均匀细杆绕 $o$ 轴的转动惯量 $J=\dfrac{\rho L^3}{3}$。由动量矩定理，可得

$$\frac{\rho L^2}{3}\ddot{\theta}+\rho\Omega^2\left(\frac{RL}{2}+\frac{L^2}{3}\right)\theta=0$$

由此可得旋翼挥舞振动的频率为

$$p=\Omega\sqrt{1+\frac{3R}{2L}}$$

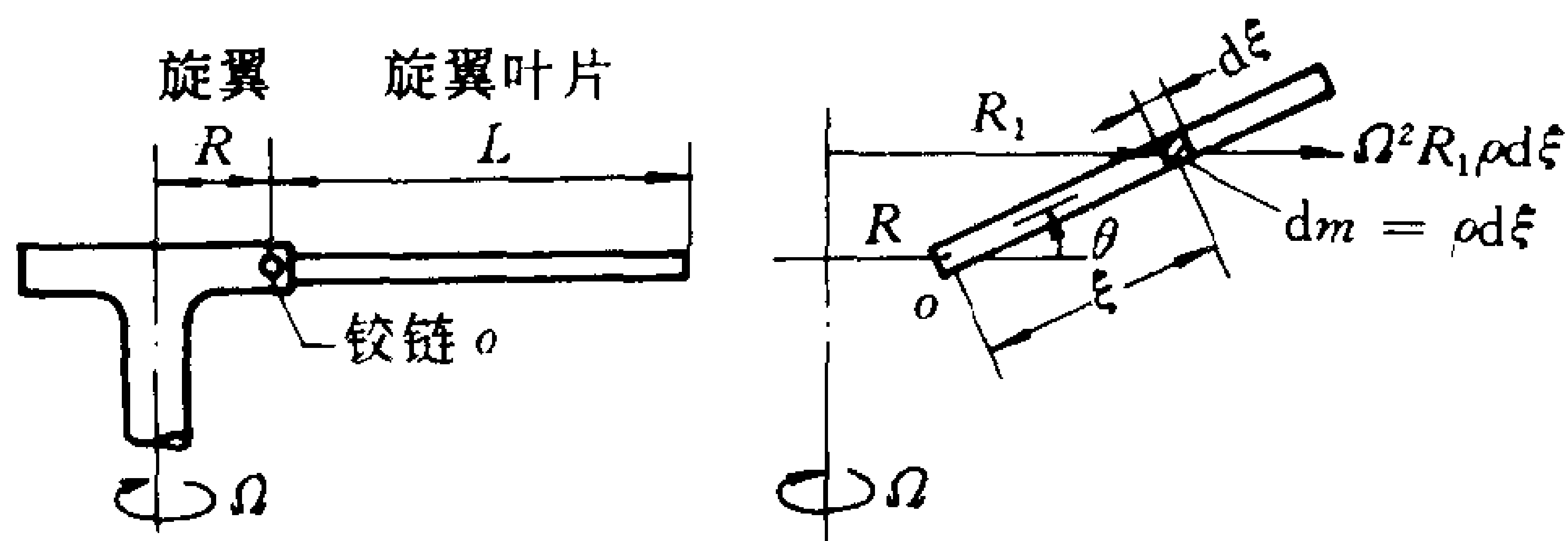



图 2.2.5　旋翼简化模型

## 2.3　能 量 法

在阻尼可以略去不计的前提下，系统在自由振动中任一时刻的机械能保持常值。系统的机械能 $E$ 等于系统的动能 $E_k$ 与势能 $E_p$ 之和，故有

$$E_k+E_p=E=\text{常数} \tag{2.3.1}$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.3.1a}$$

势能 $E_p$ 可以包括系统的弹性势能以及重力势能等。但不论系统的势能表示式中是否包含重力势能或其它势能，总可以选取系统的静平衡位置处的势能为零基准值。这样，当系统的势能为零时，动能必取最大值 $E_{kmax}$；而当动能为零时，系统的势能必取最大值 $E_{pmax}$。因此有

$$E_{kmax} = E_{pmax} = E \tag{2.3.2}$$

由上节的讨论可知，无阻尼1自由度线性系统的自由振动是谐振动。所以可以假设系统的振动为

$$x = A\sin(pt + \varphi) \tag{2.3.3}$$

利用这一假设，算出系统的 $E_{kmax}$ 与 $E_{pmax}$，再代入式(2.3.2)，即可求出系统的固有频率。

以谐振动子的水平自由振动为例。系统的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2p^2\cos^2(pt + \varphi)$$

因而有

$$E_{kmax} = \frac{1}{2}mA^2p^2$$

系统的势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(pt + \varphi)$$

因而有

$$E_{pmax} = \frac{1}{2}kA^2$$

将它们代入式(2.3.2)，可得

$$p^2 = \frac{k}{m}$$

这和上节所得结果相同。

再以谐振子的铅垂自由振动为例。设系统的自由振动是以静平衡位置为中心的谐振动，即

$$x = A\sin(pt + \varphi)$$

这时，系统动能的最大值仍为

$$E_{\text{kmax}} = \frac{1}{2}mA^2p^2$$

取系统在静平衡位置处的势能为零，则在任意位置 $x$ 处，系统的重力势能可表示为

$$E_{\text{p1}} = -mgx$$

又系统弹性势能可表示为

$$E_{\text{p2}} = \frac{1}{2}k(\delta + x)^2 - \frac{1}{2}k\delta^2$$

其中 $\delta$ 为弹簧在静平衡时的变形。于是，系统总的势能为

$$E_{\text{p}} = E_{\text{p1}} + E_{\text{p2}} = \frac{1}{2}k(\delta + x)^2 - \frac{1}{2}k\delta^2 - mgx$$

再考虑到静平衡时，有 $k\delta = mg$，故系统总的势能为

$$E_{\text{p}} = \frac{1}{2}kx^2$$

而势能最大值仍为

$$E_{\text{pmax}} = \frac{1}{2}kA^2$$

将所得 $E_{\text{kmax}}$ 与 $E_{\text{pmax}}$ 代入式(2.3.2)，可得与上节同样的结果。

上述能量法可有效地计算振动系统的固有频率。对于比较复杂的系统，能量法显得更为方便。

**例 2.3.1** 仍取图 2.2.4 中的摆为例，用能量法列出系统的运动微分方程。

**解** 由于不考虑阻尼，因而系统的机械能守恒。这时，系统的动能与势能可分别表示为

$$E_{\text{k}} = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}k(\alpha + \beta + \varphi)^2 + mgl[\sin\beta - \sin(\beta + \varphi)]$$

由式(2.3.1)与(2.3.1a),可得

$$J\ddot{\varphi} + k(\alpha + \beta + \varphi) - mgl\cos(\beta + \varphi) = 0$$

化简后结果与例2.2.1中完全一致。

## 2.4　弹性元件的等效质量

在前面的讨论中,我们假设系统的弹性元件(弹簧、梁、轴等)的质量都是可以略去不计的,这种假设是合理的。首先,当弹性元件的质量远小于振动物体的质量时,这种简化已足够准确。其次,即使弹性元件的质量与振动物体相比已不容忽视,我们还可以利用一些近似方法将弹性元件的质量折算到振动物体上去,而仍然把弹性元件看成没有质量的。

能量法可以有效地用来计算弹性元件的等效质量,关键在于计算系统的动能时要考虑弹性元件的动能。而要计算弹性元件的动能,必须知道弹性元件的振动模式,这不得不求助于近似假设。通常取弹性元件的静变形模式作为假设振动模式,这样就可以取得比较满意的结果。

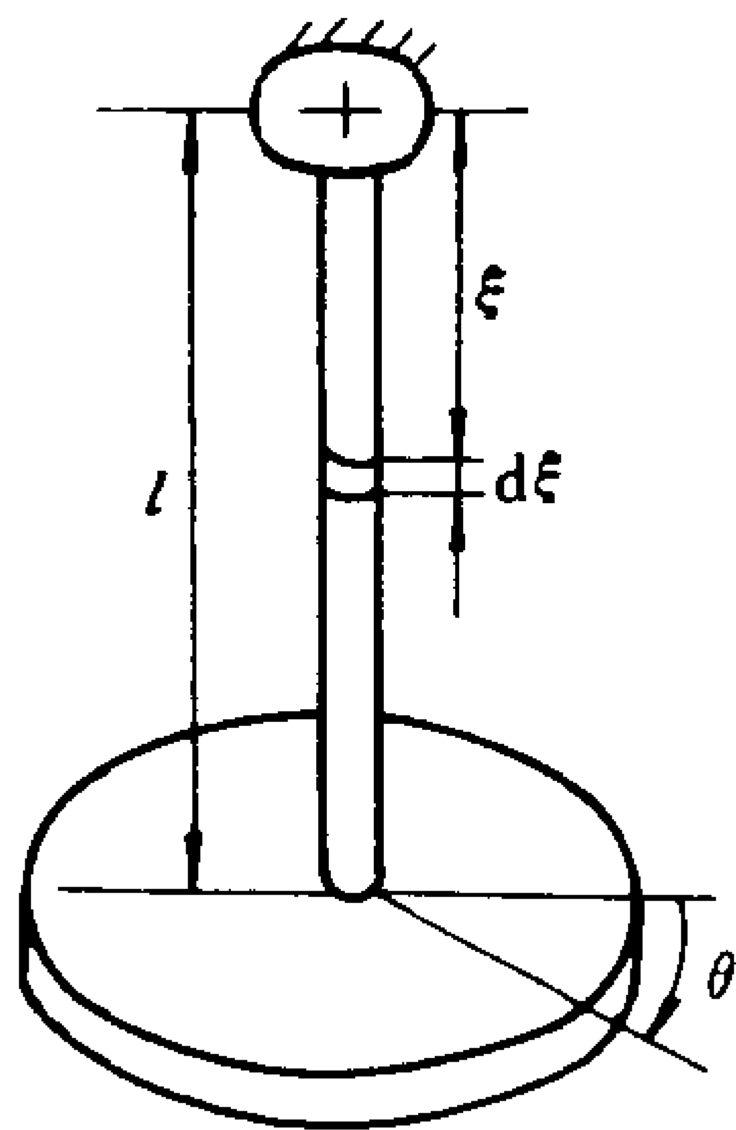



图2.4.1　扭摆

取图2.4.1所示扭振系统为例,其组成为铅垂方向的弹性圆轴,上端固定,下端附加一水平刚性盘。设轴的扭转刚度为$k$,长为$l$,单位长度的转动惯量为$\mu$。故轴的总转动惯量为$J_1 = \mu l$。再设刚性圆盘的转动惯量为$J$。取轴的静扭转变形模式作为假设振动模式。令刚性圆盘$J$的角位移为$\theta$,则离

固定端 $\xi$ 处轴的截面转角为$\frac{\xi\theta}{l}$，截面角速度为$\frac{\xi\dot{\theta}}{l}$。于是，在这一截面处 $d\xi$ 微元的动能为

$$\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\xi\dot{\theta}}{l}\right)^2 d\xi$$

而整个轴的动能为

$$\frac{1}{2}\mu\frac{\dot{\theta}^2}{l^2}\int_0^l \xi^2 d\xi = \frac{1}{2}\frac{\mu l}{3}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{J_1}{3}\right)\dot{\theta}^2$$

这时，系统总的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}\left(J + \frac{J_1}{3}\right)\dot{\theta}^2$$

而系统的势能仍为

$$E_p = \frac{1}{2}k\theta^2$$

仍然假设刚性圆盘 $J$ 作自由谐振动

$$\theta = A\sin pt$$

可得系统动能与势能的最大值为

$$E_{kmax} = \frac{1}{2}\left(J + \frac{J_1}{3}\right)A^2 p^2$$

$$E_{pmax} = \frac{1}{2}kA^2$$

由此可得

$$p^2 = \frac{k}{J + \frac{1}{3}J_1}$$

这一结果表明，如果要考虑轴的质量对系统固有频率的影响，只需将轴的转动惯量的$\frac{1}{3}$加到刚性圆盘上去就可以了。$\frac{J_1}{3}$就是轴的等效转动惯量。

## 2.5 线性阻尼系统的自由运动

在前面的讨论中，我们略去了运动所受的阻力，因而得出系统在自由振动中机械能守恒，振幅保持不变的结论。实际观察所得结果与上述结论是有出入的。所以有必要考虑阻力对自由振动的影响。实际的阻力来源不一，形式多样。有来自滑动面之间(有润滑或无润滑)的摩擦力，有来自周围介质(空气、水等)的阻力，也有来自材料内部的损耗等；有的阻力大小接近于常值，有的与速度成正比，也有的与速度平方成正比等。为了便于分析，我们只考虑其中最简单的，即大小与速度一次方成正比的阻力，这种阻力常称为**线性阻尼**。

1自由度线性阻尼系统可以用图2.5.1所示质量-弹簧-阻尼器模型来表示。其中，线性阻尼器 $c$ 提供的阻力，方向与质量 $m$ 的速度方向相反，大小与速度的一次方成正比，比例系数 $c$ 称为阻尼系数。仍以质量 $m$ 的静平衡位置为坐标原点，取水平轴 $x$，由牛顿定律可知，系统的运动分方程可表示为

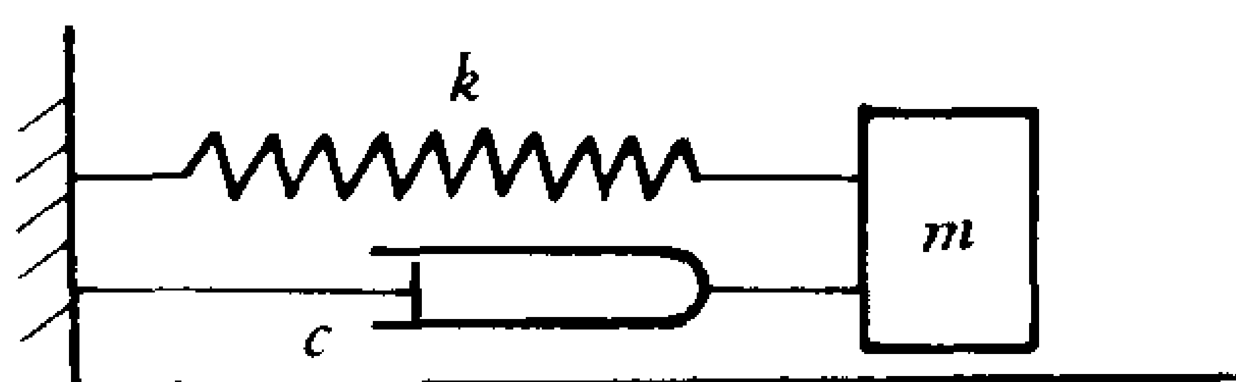



图 2.5.1 1自由度线性阻尼系统

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

或写成

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{2.5.1}$$

引入记号

$$p \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta \equiv \frac{c}{2mp} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \tag{2.5.2}$$

方程(2.5.1)又可改写为

$$\ddot{x} + 2\zeta p\dot{x} + p^2 x = 0 \tag{2.5.3}$$

其中，$p$ 即系统的无阻尼固有频率，$\zeta$ 为无量纲阻尼率。方程(2.5.3)的解可设为

$$x = Ae^{st} \tag{2.5.4}$$

式中 $A$ 为常数，$s$ 为待定参数。将式(2.5.4)代入方程(2.5.3)，可得如下代数方程

$$s^2 + 2\zeta ps + p^2 = 0$$

这一方程称为系统的**特征方程**。它的两个根

$$\left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})p \tag{2.5.5}$$

称为系统的**特征值**。由微分方程理论可知，特征值取实数、复数或有重根时，方程(2.5.3)具有不同形式的通解。而由方程(2.5.5)可以看到 $s_1$ 与 $s_2$ 的值依赖于 $\zeta$ 的取值大小。这一依赖关系可以清楚地显示在 $s$ 复平面上，如图 2.5.2 所示。从图上可以看到，当 $\zeta = 0$ 时，特征值 $s_1$ 与 $s_2$ 为一对共轭虚根($\pm \mathrm{j}p$)；当 $0 < \zeta < 1$ 时，$s_1$ 与 $s_2$ 为一对共轭复根(模等于 $p$)；当 $\zeta = 1$ 时，$s_1$ 与 $s_2$ 为一对相等的负实根($-p$)；当 $\zeta > 1$ 时，$s_1$ 与 $s_2$ 为两个不等的负实根。随着 $\zeta \to \infty$，特征值 $s_1 \to 0$，$s_2 \to -\infty$。相应于阻尼率 $\zeta$ 的不同取值范围，我们分三种情形来讨论方程(2.5.3)的通解。

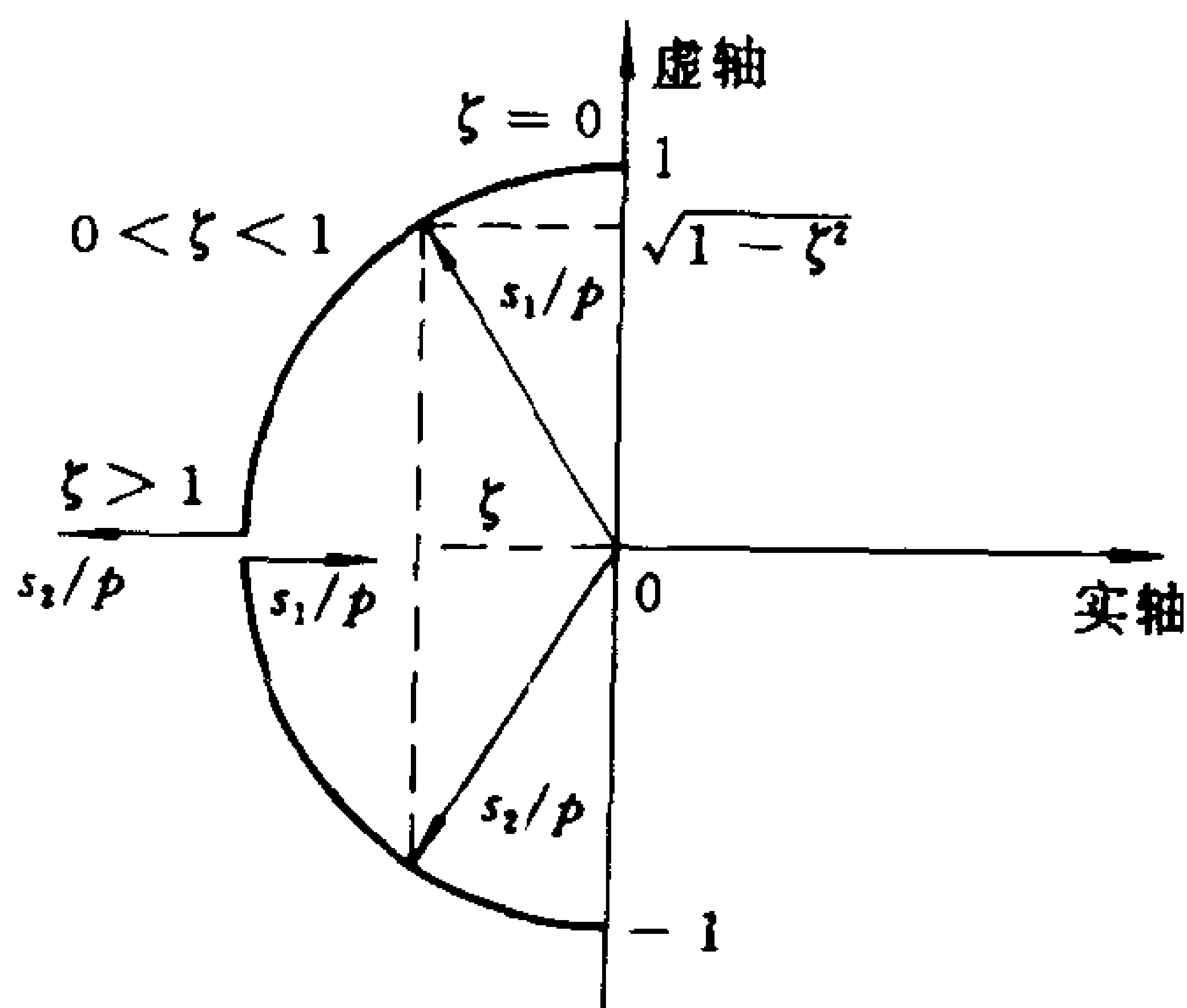



图 2.5.2 $s_1$ 与 $s_2$ 随 $\zeta$ 的变化

1. 临界阻尼情形($\zeta = 1$)

这时，系统的两个特征值相等，即

$$s_1 = s_2 = -p$$

这时方程(2.5.3)的通解可表示为

$$x = (A + Bt)e^{-pt} \tag{2.5.6}$$

设系统的初始条件为

$$x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad t = 0 \tag{2.5.7}$$

对应于这一初始条件的解为

$$x = [x_0 + (x_o p + \dot{x}_0)t]e^{-pt} \tag{2.5.8}$$

如图 2.5.3 所示。可以看出，这时系统的自由运动不具有振动特性。这一情形下的阻尼系数称为**临界阻尼系数**，记为 $c_c$，有

$$c_c = 2mp = 2\sqrt{mR} \tag{2.5.9}$$

可见，无量纲阻尼率 $\zeta$ 就是阻尼系数与临界阻尼系数之比，即有

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

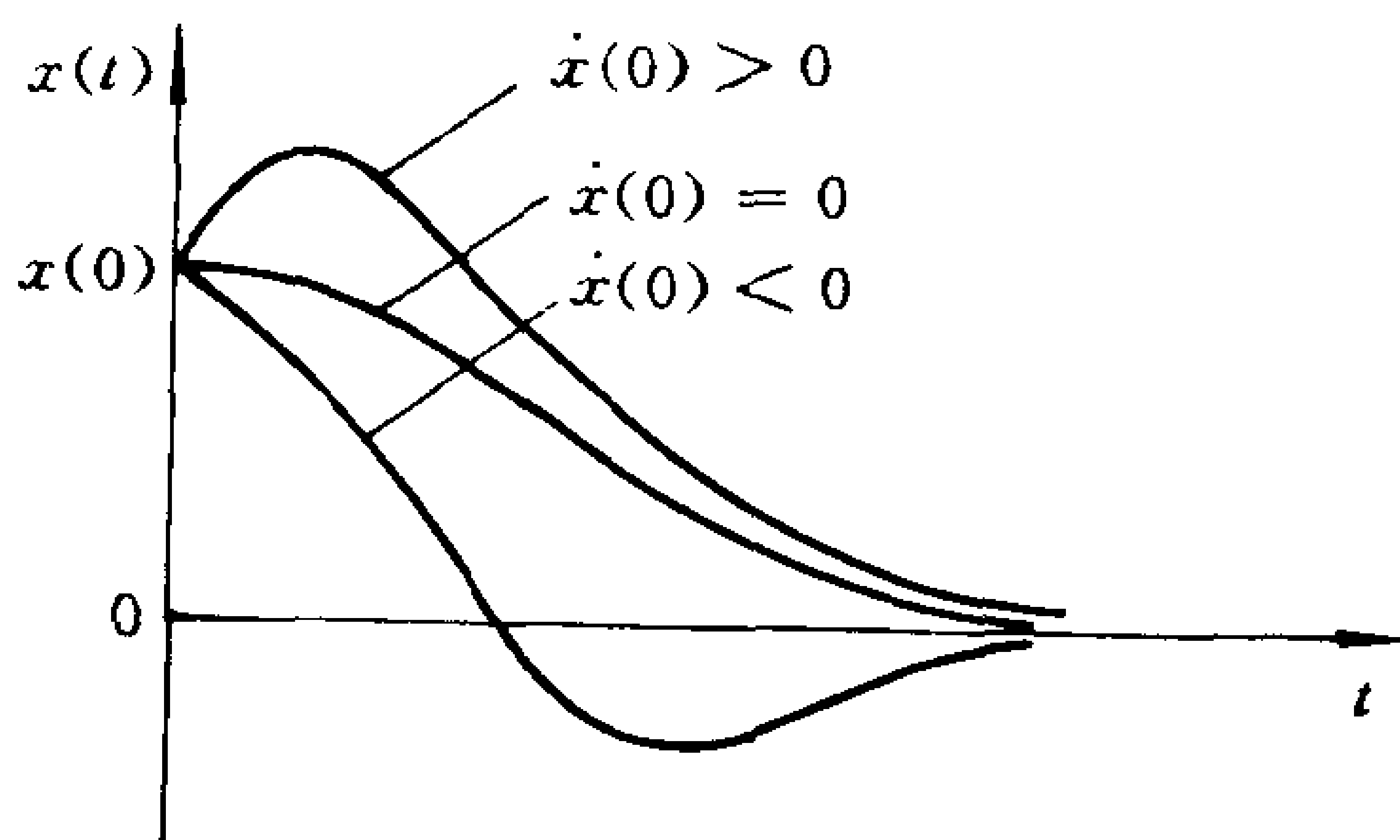



图 2.5.3　临界阻尼情形($\zeta = 1$)

2. 超临界阻尼情形($\zeta > 1$)

这时，系统的两个特征值为不等的负实数，即

$$s_1 = (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})p$$

$$s_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})p$$

对应于上述特征值 $s_1$ 与 $s_2$，方程(2.5.3)的通解可表示为

$$x = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \tag{2.5.10}$$

对应于初始条件(2.5.7)，上式中的 $A$ 与 $B$ 将为

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{x_0\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} + \frac{\dot{x}_0}{p\sqrt{\zeta^2-1}}\right) \\ B &= \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{x_0\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} - \frac{\dot{x}_0}{p\sqrt{\zeta^2-1}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.5.11}$$

式(2.5.10)右端两项都是随时间单调变化的量，所以，这一情形下系统的自由运动也不具有振动特性，如图 2.5.4 所示。

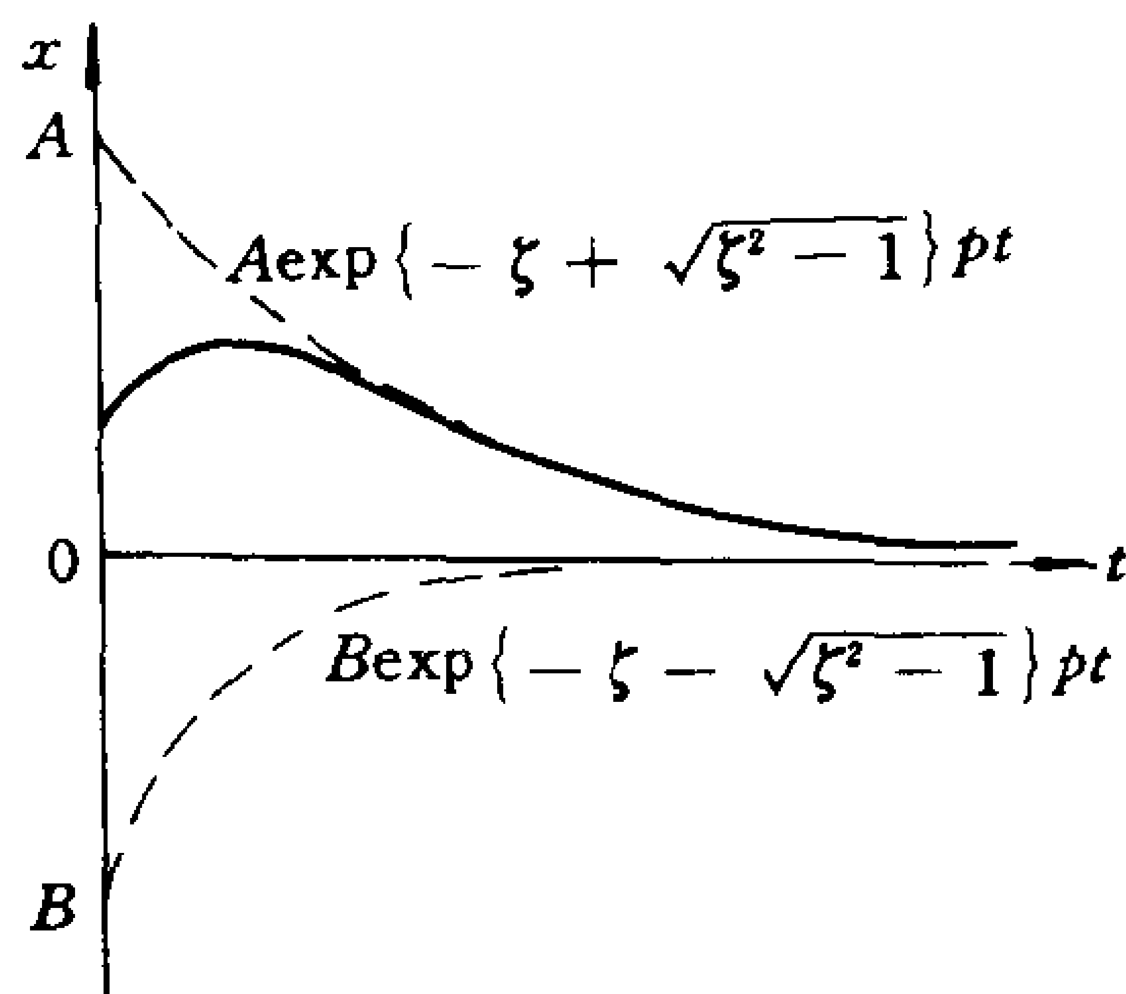



图 2.5.4 超临界阻尼情形

设系统的初始条件为

$$x = 0,\quad \dot{x} = \dot{x}_0,\quad t = 0$$

则由式(2.5.11)，有

$$A = -B = \frac{\dot{x}_0}{2p\sqrt{\zeta^2-1}}$$

考虑到双曲函数的表示式

$$\mathrm{sh}u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$$

由式(2.5.10)可得

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-\zeta pt}\mathrm{sh}(\sqrt{\zeta^2-1}pt) \tag{2.5.12}$$

这就是超临界阻尼情形下 1 自由度线性系统对初始速度的响应表示式。

3. 亚临界阻尼情形($0 < \zeta < 1$)

这时，系统的两个特征值为一对共轭复数，即

$$s_1 = -\zeta p + \mathrm{j}q$$

$$s_2 = -\zeta p - \mathrm{j}q$$

其中

$$q \equiv \sqrt{1-\zeta^2}p, \qquad j \equiv \sqrt{-1}$$

因而方程(2.5.3)的通解可表示成

$$x = e^{-\zeta pt}(A_1 e^{jqt} + A_2 e^{-jqt})$$

式中 $A_1$、$A_2$ 为任意常数，因为 $x$ 为实数，故 $A_1$ 与 $A_2$ 必为共轭复数。利用如下欧拉表示式

$$e^{jqt} = \cos qt + j\sin qt$$

$$e^{-jqt} = \cos qt - j\sin qt$$

上述通解又可表示为

$$x = e^{-\zeta pt}[(A_1 + A_2)\cos qt + j(A_1 - A_2)\sin qt)] \tag{2.5.13}$$

注意到 $A_1$ 与 $A_2$ 为共轭复数，如令

$$A_1 + A_2 = A\sin\varphi$$

$$j(A_1 - A_2) = A\cos\varphi$$

则通解 $x$ 又可写成

$$x = Ae^{-\zeta pt}\sin(qt + \varphi) \tag{2.5.14}$$

上式在 $\zeta = 0$ 时，退化为无阻尼情形的谐振动表示式(2.2.4)。

对式(2.5.14)求导，可得

$$\dot{x} = Ae^{-\zeta pt}[q\cos(qt + \varphi) - \zeta p\sin(qt + \varphi)] \tag{2.5.15}$$

将初始条件(2.5.7)代入式(2.5.14)、(2.5.15)，可得

$$A\sin\varphi = x_0$$

$$A\cos\varphi = \frac{\dot{x}_0 + \zeta p x_0}{q}$$

由式(2.5.13)可得

$$x = e^{-\zeta pt}\left(x_0\cos qt + \frac{\dot{x}_0 + \zeta p x_0}{q}\sin qt\right) \tag{2.5.16}$$

这就是方程(2.5.3)在亚临界阻尼情形下，对应于初始条件(2.5.7)的解。它也可以表示成式(2.5.14)的形式，只是其中的 $A$ 与 $\varphi$ 将取值为

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta p x_0}{q}\right)^2} \\ \varphi &= \arctan\frac{q x_0}{\dot{x} - 0 + \zeta p x_0} \end{aligned}\right\} \tag{2.5.17}$$

从式(2.5.14)可以清楚地看到，它们右端有两个因子，一个是衰减的指数函数，一个是正弦函数。由于后一因子，系统的运动具有某种振动特点，即有一定的周期往复性；由于前一因子，系统的振动又将是逐渐消逝的。因而在亚临界阻尼情形，系统的自由运动是一种“衰减振动”，如图 2.5.5 所示。

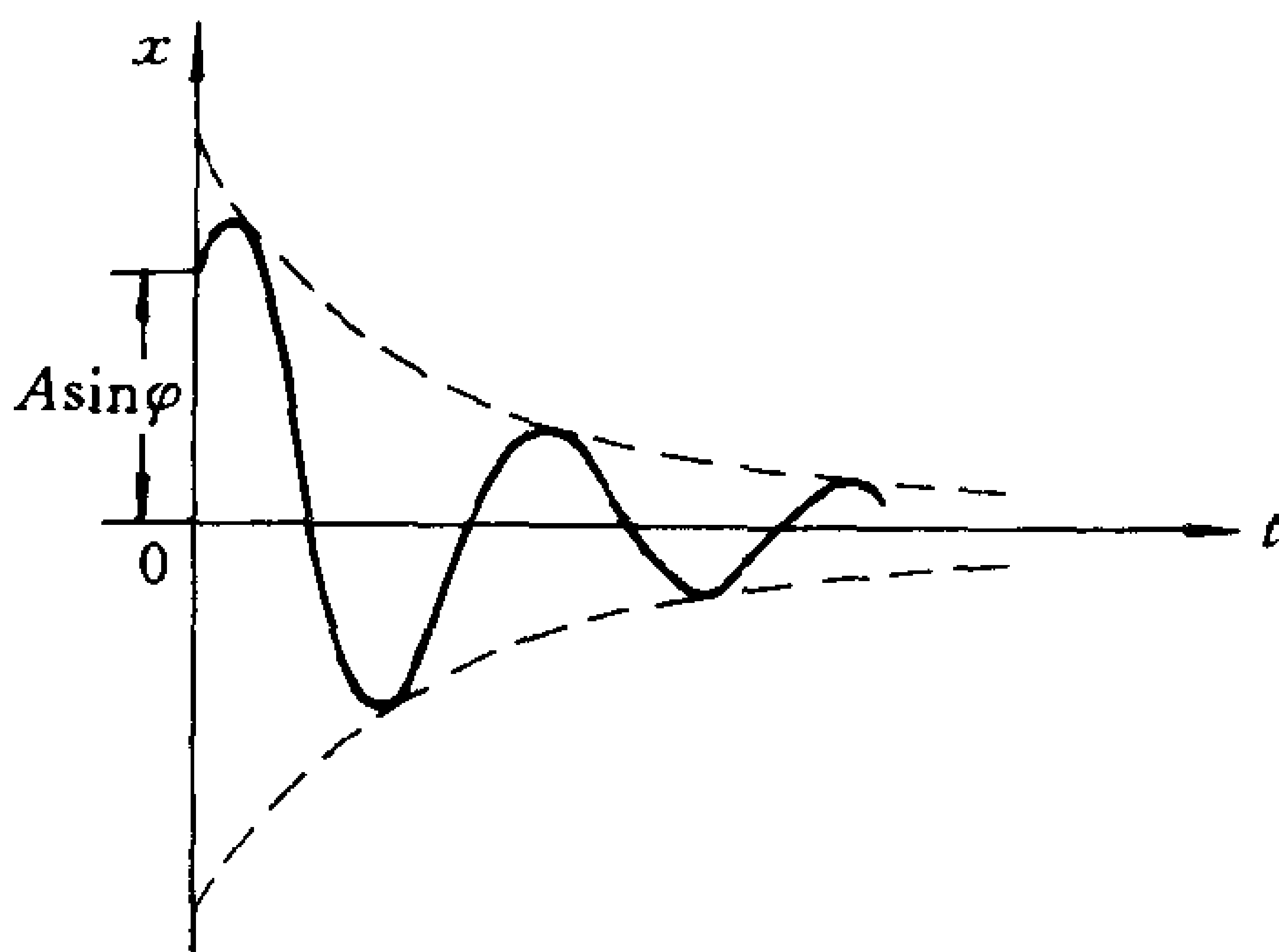



图 2.5.5　亚临界阻尼情形($\zeta < 1$)

当初始条件中 $x_0 = 0$ 时，式(2.5.16)简化为

$$x = \frac{\dot{x}_0}{q} e^{-\zeta p t} \sin qt \tag{2.5.18}$$

它是亚临界阻尼情形下 1 自由度线性系统对初始速度的影响表示式。当 $\zeta = 0$ 时，上式退化为无阻尼情形的相应表示式

$$x = \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt \tag{2.5.19}$$

综上所述，1 自由度线性系统在超临界阻尼与临界阻尼情形

下，它的自由运动都不具振动特性；只有在亚临界阻尼情形下，它的自由运动才带有振动色彩，且为衰减振动。工程上常见的是亚临界阻尼情形，所以在下一节中再专门详细讨论。

## 2.6 衰减振动与对数减幅率

上节已经指出，1自由度线性系统在亚临界阻尼情形下的自由振动为衰减振动，可以表示为

$$x = Ae^{-\zeta pt}\sin(qt + \varphi) \tag{2.6.1}$$

且对应于初始条件

$$x = x_0,\quad \dot{x} = \dot{x}_0,\quad t = 0$$

有

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta p x_0}{q}\right)^2} \\ \varphi &= \arctan\frac{q x_0}{\dot{x}_0 + \zeta p x_0} \end{aligned}\right\}$$

习惯上，常将函数 $\sin(qt + \varphi)$ 的角频率 $q$ 当做上述衰减振动的角频率。因而衰减振动的周期 $T'$ 为

$$T' = \frac{2\pi}{q} = \frac{2\pi}{p\sqrt{1-\zeta^2}}$$

可见，与无阻尼系统的周期 $T = \dfrac{2\pi}{p}$ 相比，阻尼使系统的周期变长。当 $\zeta \to 1$ 时，有 $T' \to \infty$，从而使运动失去周期性。不过，在阻尼甚小，即 $\zeta \ll 1$ 的情形，阻尼对系统固有频率与周期的影响甚微，可以略去不计。例如，当 $\zeta = 0.1$ 时，有 $q = 0.995p$，$T' = 1.005T$。也就是说，与无阻尼情形相比，只差0.5%。

另一方面，阻尼对振动幅度的影响往往不容忽视。可以用 $x$ 的各个极大值代表衰减振动的幅度。不难证明，任意两个相邻极大值之间的时间间隔恰巧就等于衰减振动的周期 $T'$。事实上，对式

(2.6.1) 求导数，可得

$$\dot{x} = Ae^{-\zeta pt}[q\cos(qt+\varphi) - \zeta p\sin(qt+\varphi)]$$

令上式右端等于零，得

$$\tan(qt+\varphi) = \frac{q}{\zeta p} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

由此可得 $x$ 取极值的各个时刻 $t_n$，它们满足

$$qt_n + \varphi = n\pi + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

考虑到 $x$ 的极大值与极小值是相互交替出现的，设任意两个相邻极大值 $x_s$ 与 $x_{s+2}$ 所对应的时刻分别为 $t_s$ 与 $t_{s+2}$，于是有

$$q(t_{s+2} - t_s) = 2\pi$$

即

$$t_{s+2} - t_s = \frac{2\pi}{q} = T'$$

因而，任意两个相邻极大值之比 $\eta$ 为

$$\eta \equiv \frac{x_s}{x_{s+2}} = \frac{e^{-\zeta pt_s}\sin(qt_s+\varphi)}{e^{-\zeta p(t_s+T')}\sin(qt_s+\varphi+2\pi)} = e^{\zeta pT'}$$

故 $\eta$ 为常数，$\frac{1}{\eta}$ 称为**减幅率**①。可见，衰减振动中，振幅是按几何级数缩减的。每隔一个周期，振幅缩减为原来的$\frac{1}{\eta}$。例如，当 $\zeta = 0.1$ 时，有 $\zeta pT = 0.631$，$\eta = 1.880$，$\frac{1}{\eta} = 0.532$；就是说，经过 1 个周期，振幅差不多减小为原来的一半；经过 5 个周期，振幅将减小为原来的 4.3%。所以说，衰减振动一般将迅速停息。

减幅率的自然对数，称为**对数减幅率**，记为 $-\delta$，有

$$\delta = -\ln\frac{1}{\eta} = \ln\eta = \zeta pT' = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

---

① 事实上，衰减振动中，对应于先后相隔 T′ 的任意两个时间的位移比，都等于常数 η。

如图 2.6.1 所示。当阻尼甚小,即 $\zeta \ll 1$ 时,近似地有

$$\delta = 2\pi\zeta$$

或写成

$$\zeta = \frac{\delta}{2\pi}$$

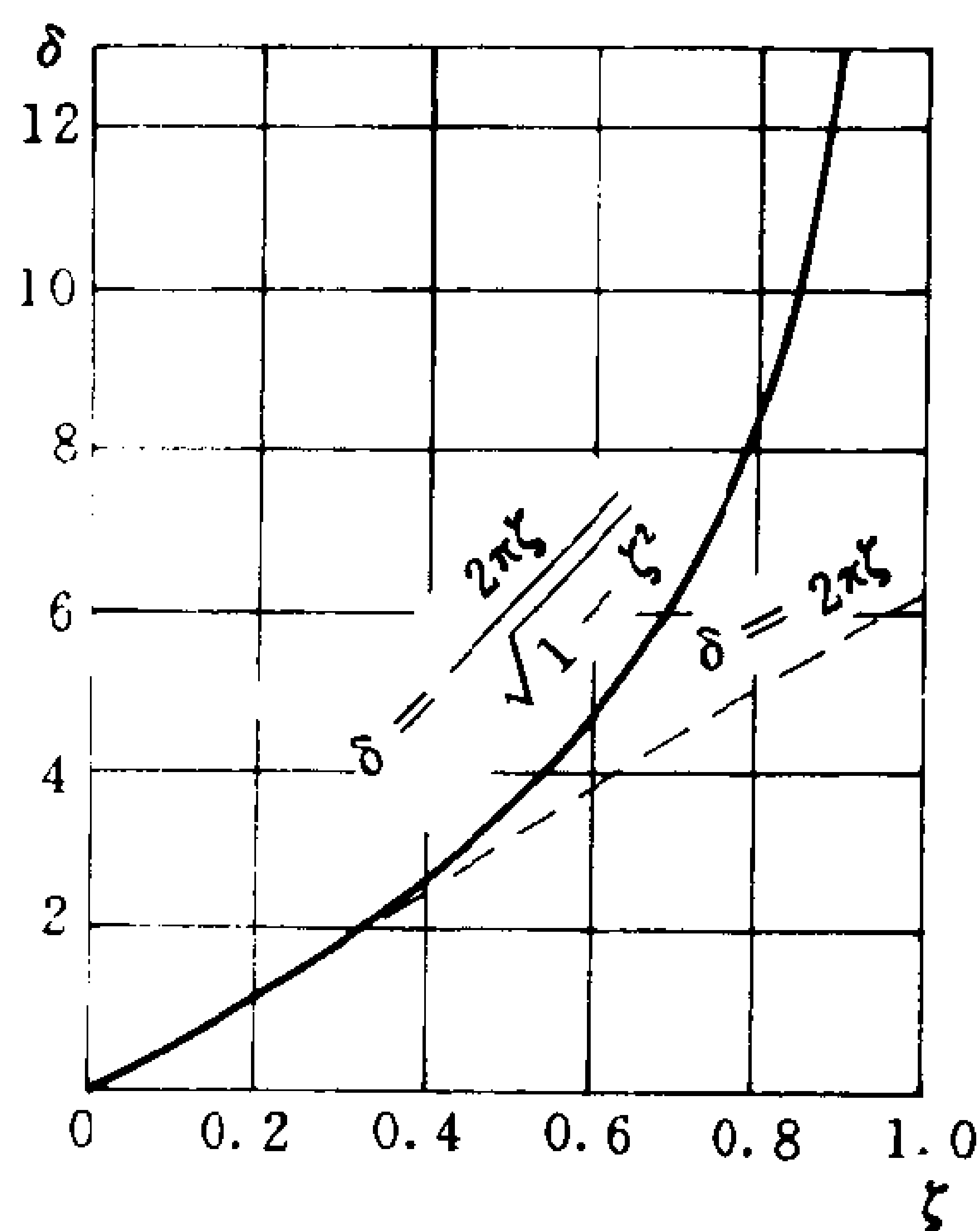



图 2.6.1 $\delta$ 随 $\zeta$ 的变化

因此,从衰减振动的时间历程曲线算出 $\delta$,即可求得系统的阻尼率 $\zeta$。在阻尼非常小,因而相继两个振幅的衰减不太显著的情形,为提高精度,可以测量相隔 $n$ 周的振幅衰减量来计算 $\delta$。事实上,在相继 $n$ 周振幅中,振幅 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 有如下关系:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \cdots = \frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\delta}$$

因而有

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)\left(\frac{x_2}{x_3}\right)\cdots\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right) = e^{n\delta}$$

由此得

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right)$$

这样,只要测定衰减振动的第 1 个振幅与第 $n+1$ 个振幅之比,就可以算出 $\delta$,从而确定系统的阻尼率 $\zeta$。

# 第三章　1自由度线性系统(二)——定常强迫振动

## 3.1　引　言

振动分析的一个重要课题是研究系统对于外界激励的响应。上一章中考察的自由振动也可以看做是系统对于初始扰动的响应。初始扰动是外界对系统极短暂的作用,自由振动开始于扰动终了时刻。更常见的外界激励是经常性的,它在系统振动过程中始终存在。系统在经常性激励作用下的振动称为强迫振动。本章讨论1自由度线性系统在周期性激励作用下的强迫振动。线性系统的一个最重要的特点是叠加原理适用于它。所谓**叠加原理**是指"系统对多个激励的总响应,就等于系统对各个激励单独作用下的响应之和"。换句话说,设系统对激励$f_1$与$f_2$的响应分别为$x_1$与$x_2$,那末系统对激励$c_1f_1+c_2f_2$的总响应就等于$c_1x_1+c_2x_2$,其中$c_1$与$c_2$是常数。我们知道,周期函数通常可以借谐和分析,展开成若干个谐和函数之和。因此,周期激励可以分解为若干个谐和激励;基于叠加原理,只要求出系统对各个谐和激励的响应,然后再把它们叠加起来,就可得到系统对周期激励的总响应。所以本章将详细地讨论1自由度线性系统对谐和激励的响应,重点放在系统的定常响应特性,系统对应于各种频率的谐和激励的定常响应特性,常称为**频率特性**。讨论结果都表示成无量纲形式,这样,不仅可以具有更大的适用性,而且往往更深刻地反映事物的本质。在讨论中常提到的

放大率就是系统的无量纲幅频特性。许多振动问题都是从系统放大率的变化规律中找到解释和解决办法的。从1自由度线性系统所得的结果，不仅本身有着许多重要应用，而且可以作为多自由度线性系统振动响应分析的重要基础。

我们先从无阻尼系统的响应分析开始，接着讨论阻尼对定常响应的影响，然后讨论复谐和激励情形的定常响应，并引出系统动刚度、动柔度等重要概念。接下来考察系统对周期激励的响应。最后，介绍测振与隔振的基本原理，以及结构阻尼系统的定常响应分析等。

## 3.2 系统对谐和激励的响应(一)——无阻尼情形

在不计阻尼的情形下，仍可取谐振子作为系统模型，如图3.2.1所示。假设在质量 $m$ 上作用有水平方向的谐和扰力

$$F = F_0\cos\omega t$$

式中 $F_0$ 称为扰力的力幅，设为常数；$\omega$ 称为扰力频率，简称扰频。以无扰力作用时质量 $m$ 的静平衡位置作为原点，取水平轴 $x$。当质量 $m$ 的位移为 $x$ 时，弹性恢复力在 $x$ 轴上的投影仍为 $-kx$，而扰力的投影即为 $F$，故由牛顿定律，有

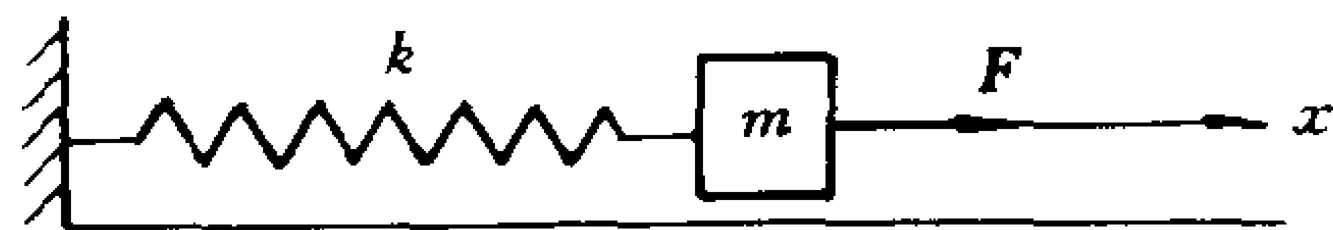



图 3.2.1 谐和激励下的谐振子

$$m\ddot{x} + kx = F_0\cos\omega t \tag{3.2.1}$$

这就是谐振子在谐和扰力作用下的运动微分方程。引入记号

$$p^2 \equiv \frac{k}{m}, \qquad X_0 \equiv \frac{F_0}{k}$$

则方程(3.2.1)可改写为

$$\ddot{x} + p^2 x = X_0 p^2 \cos\omega t \tag{3.2.2}$$

它是非齐次的二阶常系数线性常微分方程。当扰力 $F = 0$ 时，上式退化为齐次方程(2.2.1)

$$\ddot{x} + p^2 x = 0$$

由常微分方程理论，非齐次方程(3.2.2)的通解由两部分组成，即有

$$x = x_1 + x_2 \tag{3.2.3}$$

其中 $x_1$ 为相应齐次方程(2.2.1)的通解，具有式(2.2.2)或式(2.2.4)的形式，即

$$x_1 = B\sin pt + D\cos pt = A\sin(pt + \varphi) \tag{3.2.4}$$

而 $x_2$ 则为方程(3.2.2)的一个特解，取如下形式

$$x_2 = X\cos\omega t \tag{3.2.5}$$

其中 $X$ 可确定如下。将式(3.2.5)代入方程(3.2.2)，得

$$(p^2 - \omega^2)X = X_0 p^2$$

故有

$$X = \frac{X_0 p^2}{p^2 - \omega^2} = \frac{X_0}{1 - \gamma^2} \tag{3.2.6}$$

式中 $\gamma \equiv \dfrac{\omega}{p}$，为扰力频率与固有频率之比，简称**频率比**。将式(3.2.4)、(3.2.5)、(3.2.6)代入通解(3.2.3)，可得

$$x = B\sin pt + D\cos pt + \frac{X_p}{1 - \gamma^2}\cos\omega t \tag{3.2.7}$$

对上式求导数，可得

$$\dot{x} = Bp\cos pt - Dp\sin pt - \frac{X_0\omega}{1 - \gamma^2}\sin\omega t \tag{3.2.8}$$

设系统的初始条件为

$$x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad t = 0 \tag{3.2.9}$$

按这一初始条件，可由式(3.2.7)与(3.2.8)定出

$$\left.\begin{aligned} D &= x_0 - \frac{X_0}{1-\gamma^2} \\ B &= \frac{\dot{x}_0}{p} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.10}$$

于是方程(3.2.2)对应于初始条件(3.2.9)的解为

$$x = \frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt + x_0\cos pt - \frac{X_0}{1-\gamma^2}\cos pt + \frac{X_0}{1-\gamma^2}\cos\omega t \tag{3.2.11}$$

式中前两项分别对应于初速度与初位移引起的自由振动，第三项对应于扰力引起的自由振动；最后一项对应用于系统的定常强迫振动，它是与扰力形式相同的谐和函数。

值得一提的是，扰力不仅激起强迫振动，同时也激起自由振动。即使对应于零初始条件，即

$$x = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad t = 0$$

方程(3.2.2)的解仍取如下形式

$$x = \frac{X_0}{1-\gamma^2}(\cos\omega t - \cos pt) \tag{3.2.12}$$

式中第二项即自由振动。

现在来看当扰频 $\omega$ 无限趋近于系统固有频率 $p$ 的情形。这时有

$$\omega - p = 2\varepsilon \to 0$$

利用三角函数的和差化积公式，解(3.2.12)可表示成

$$x = \frac{2X_0}{\gamma^2 - 1}\sin\omega t \sin\frac{\omega + p}{2}t \tag{3.2.13}$$

注意到

$$\gamma^2 - 1 = \frac{p^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{p^2}{(\omega + p)(\omega - p)} = \frac{p^2}{2\varepsilon(\omega + p)}$$

所以，当 $\varepsilon \to 0$ 时，式(3.2.13)化为

$$x = \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{X_0 p^2 t}{\omega + p}\,\frac{\sin\varepsilon t}{\varepsilon t}\,\sin\frac{\omega + p}{2}t$$

$$= \frac{1}{2}X_0\omega t\sin\omega t \tag{3.2.14}$$

如图3.2.2所示。可见,当$\gamma = 1$,即$\omega = p$时,系统的强迫振动是非定常的,其振幅随时间线性增长,需要经过无限长的时间,振幅才能达到无限大。

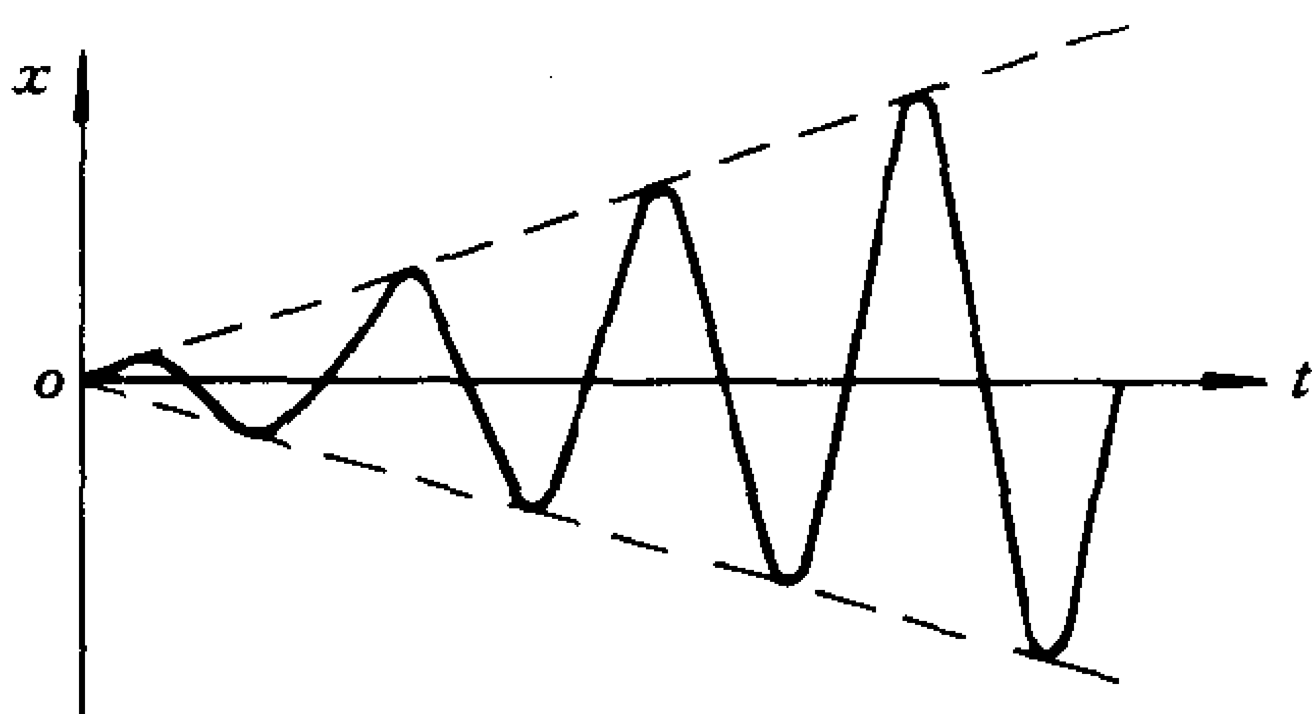



图3.2.2 共振建立过程

从式(3.2.13)还可以看到,当$\omega$在$p$的邻域内时,系统的强迫振动是振幅受正弦函数

$$\left|\frac{2X_0}{\gamma^2 - 1}\right|\sin|\varepsilon|t$$

调制的振动,如图3.2.3所示①。当$|\varepsilon|$甚小时,幅值$\left|\frac{2X_0}{\gamma^2 - 1}\right|$可以很大,但要达到这一幅值,必须经过足够长的时间$t_1$,即有

$$t_1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{|\varepsilon|}\right)$$

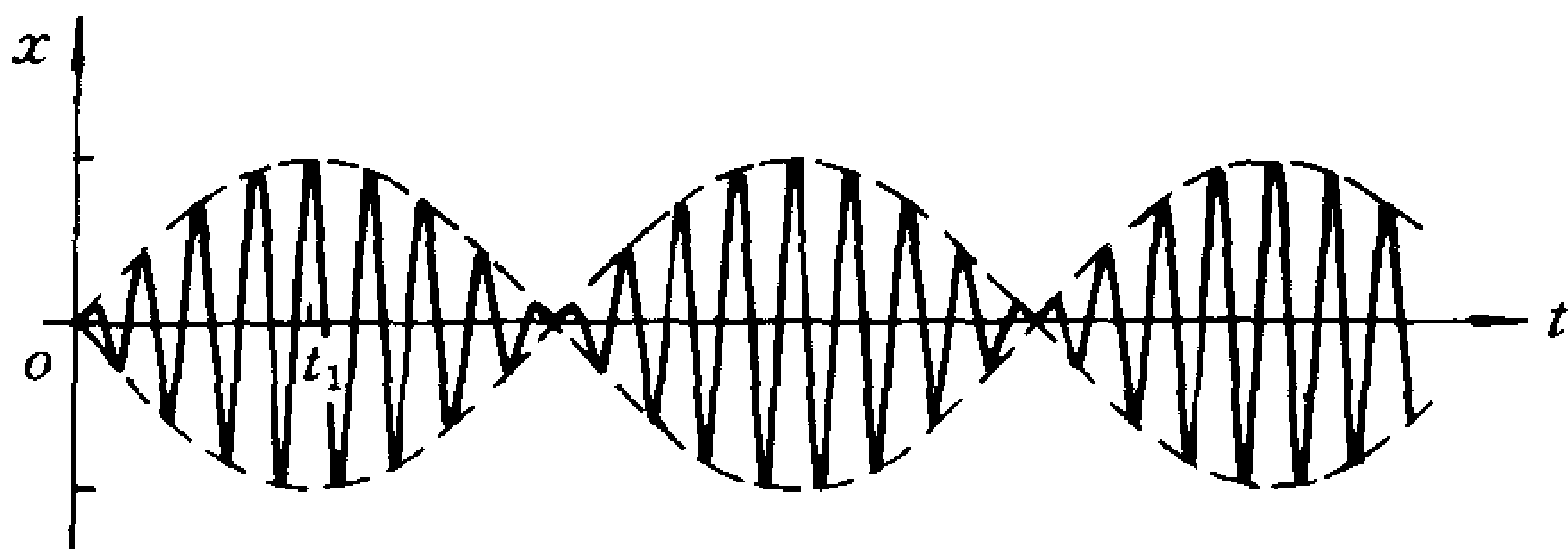



图3.2.3 拍

下面来看系统在共振区外的定常强迫振动,即方程(3.2.2)的特解

① 这种振动常称为拍。

$$x_2 = \frac{X_0}{1-\gamma^2}\cos\omega t \tag{3.2.15}$$

所代表的振动。由式(3.2.15)可以看到，当 $\gamma < 1$ 时，$x_2$ 是与扰力同相的谐振动，随着 $\gamma$ 由零逐渐增大，振幅由 $X_0$ 开始单调增大。当 $\gamma > 1$ 时，$x_2$ 可写成

$$x_2 = \frac{X_0}{\gamma^2 - 1}\cos(\omega t + \pi)$$

它是与扰力反相的谐振动，随着 $\gamma$ 无限增大，其振幅单调减小趋于零。

$X_0$ 可以理解为零频率位移，即在静力 $F_0$ 作用下系统的位移。比值 $\left|\frac{X}{X_0}\right|$ 体现了谐和扰力的动力效应，故称为**放大率**，记为 $\beta$，则有

$$\beta = \frac{1}{|1-\gamma^2|}$$

放大率与频率比的关系曲线，即 $\beta$-$\gamma$ 曲线，如图 3.2.4 所示。

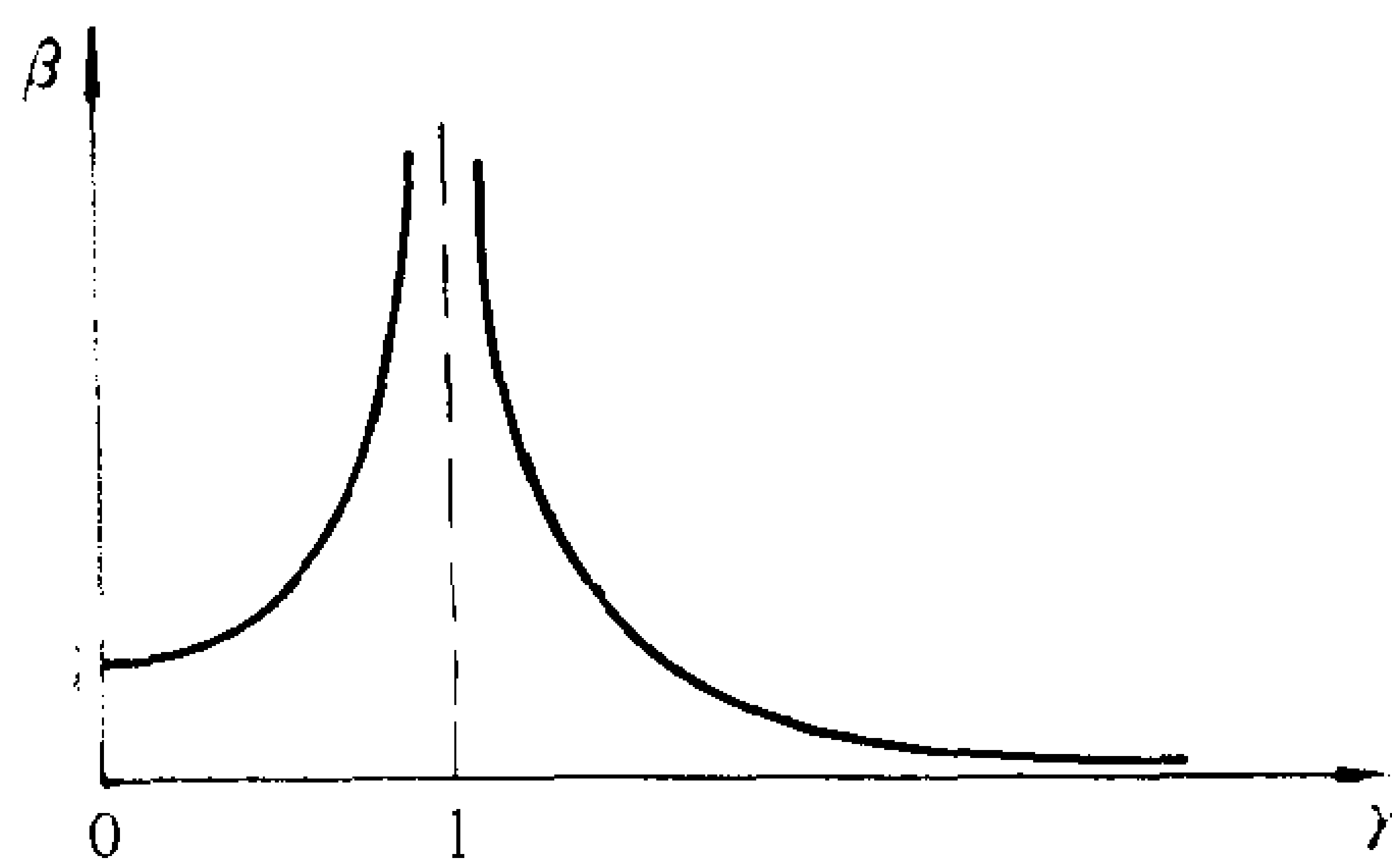



图 3.2.4 $\beta$-$\gamma$ 曲线

当 $\omega$ 接近于 $p$ 时，强迫振动振幅可能达到非常大的值，这种现象称为**共振**。使振幅有最大值的扰频称为共振频率，$\omega$ 接近 $p$ 的区域称为共振区。由图 3.2.2 可见，共振需要一个相当长的建立过程。所以，即使在临界转速(即与共振频率相对应的转速)以上工

作的机器，只要有足够的加速功率，使得机器能很快地穿过共振区，那末也就不致发生太大的振幅。相反地，如果长期逗留在共振区内，显然是极为不利，甚至是危险的。所以，机器的工作区应远离共振区。

## 3.3　系统对谐和激励的响应(二)——线性阻尼情形

上节对无阻尼情形的分析，得出了系统在共振情形振幅将随时间无限增长的结论。实际情况并没有如此严重，因为实际的振系总是有阻尼的，而只要有一点阻尼，系统的振幅就不会趋于无限大。本节就来讨论线性阻尼对系统强迫振动的影响。

图 3.3.1 所示为受谐和扰力 $F = F_0\cos\omega t$ 作用的 1 自由度线性阻尼系统，与图 3.2.1 所示情形相比，除了这时多一个线性阻力外，其余都一样。假设这一阻力大小与质量 $m$ 的速度成正比，而方向与该速度相反，则阻力在 $x$ 轴上的投影可表示为 $-c\dot{x}$。由牛顿定律，有

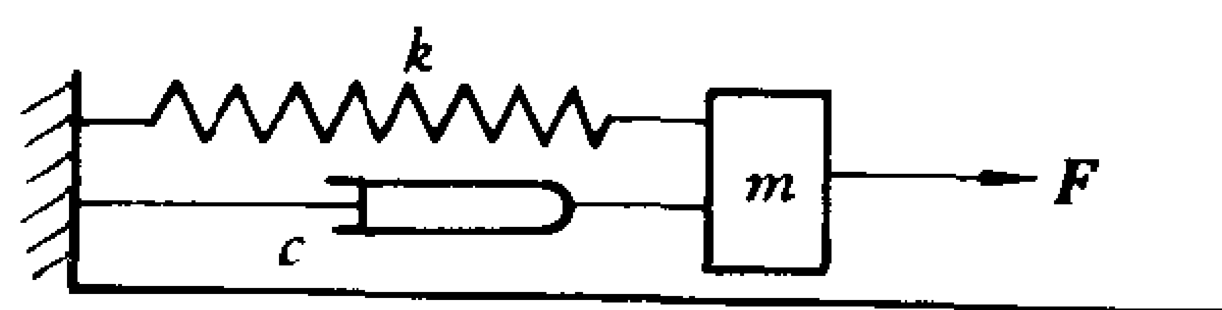


图 3.3.1　谐和激励下的 1 自由度线性阻尼系统

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0\cos\omega t \qquad (3.3.1a)$$

引入记号

$$p^2 \equiv \frac{k}{m}, \qquad X_0 \equiv \frac{F_0}{k}$$

$$\zeta \equiv \frac{c}{2pm} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{c_c}$$

则上述方程可改写为

$$\ddot{x} + 2\zeta p\dot{x} + p^2x = X_0p^2\cos\omega t \qquad (3.3.1)$$

这就是线性阻尼系统在谐和扰力作用下的运动微分方程。它也是

一个非齐次方程。当 $F=0$ 时，方程退化为齐次方程(2.5.1)

$$\ddot{x}+2\zeta p\dot{x}+p^2x=0$$

非齐次方程(3.3.1)的通解 $x$ 由相应齐次方程(2.5.1)的通解 $x_1$ 再加上方程(3.3.1)的一个特解 $x_2$ 组成，即有

$$x=x_1+x_2$$

在亚临界阻尼情形($\zeta<1$)下，有

$$x_1=e^{-\zeta pt}(B\sin qt+D\cos qt) \tag{3.3.2}$$

其中 $q=\sqrt{1-\zeta^2}p$，而 $B$ 与 $D$ 为任意常数。特解 $x_2$ 可表示为

$$x_2=X\cos(\omega t-\psi) \tag{3.3.3}$$

其中 $X$ 与 $\psi$ 可确定如下。将式(3.3.3)代入方程(3.3.1)，可得

$$(p^2-\omega^2)X\cos(\omega t-\psi)-2\zeta p\omega X\sin(\omega t-\psi)=X_0p^2\cos\omega t \tag{3.3.4}$$

为了便于比较，可将上式右端的 $\cos\omega t$ 改写成

$$\begin{aligned}\cos\omega t&=\cos[(\omega t-\psi)+\psi]\\&=\cos(\omega t-\psi)\cos\psi-\sin(\omega t-\psi)\sin\psi\end{aligned}$$

要使式(3.3.4)恒成立，等号两侧 $\cos(\omega t-\psi)$ 与 $\sin(\omega t-\psi)$ 项的系数必须分别相等，即有

$$(p^2-\omega^2)X=X_0p^2\cos\psi \tag{3.3.5a}$$

$$2\zeta\omega X=X_0p\sin\psi \tag{3.3.5b}$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}X&=\frac{X_0p^2}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+(2\zeta p\omega)^2}}\\\tan\psi&=\frac{2\zeta p}{p^2-\omega^2}\end{aligned}\right\} \tag{3.3.6a}$$

引入频率比 $\gamma\equiv\frac{\omega}{p}$，上式可改写为

$$\left.\begin{aligned}X&=\frac{X_0}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}}\\\tan\psi&=\frac{2\zeta\gamma}{1-\gamma^2}\end{aligned}\right\} \tag{3.3.6b}$$

于是,方程(3.3.1)的通解可表示为

$$x = e^{-\zeta pt}(B\sin qt + D\cos qt) + X\cos(\omega t - \psi) \tag{3.3.7}$$

其中 $X$ 与 $\psi$ 由式(3.3.6$a$)或式(3.3.6$b$)确定。

对应于初始条件

$$x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad t = 0$$

可以确定相应的 $B$ 与 $D$ 为

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{\dot{x}_0}{q} + \frac{\zeta p}{q}(x_0 - X\cos\psi) - \frac{X\omega}{q}\sin\psi \\ D &= x_0 - X\cos\psi \end{aligned}\right\} \tag{3.3.8}$$

所以,方程(3.3.1)对应于上述初始条件的解为

$$\begin{aligned} x = {} & e^{-\zeta pt}\left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta p x_0}{q}\sin qt + x_0\cos qt\right) \\ & - Xe^{-\zeta pt}\left(\frac{\zeta p\cos\psi + \omega\sin\psi}{q}\sin qt + \cos\psi\cos qt\right) \\ & + X\cos(\omega t - \psi) \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

上式右端第一部分代表由初位移与初速度引起的自由振动,第二部分代表扰力引起的自由振动,第三部分代表与扰力同形式的定常强迫振动。自由振动部分都是减幅振动,它们将随时间的推移而消逝。最后剩下的就只有定常强迫振动。

下面详细地来讨论这一定常响应

$$x = X\cos(\omega t - \psi)$$

由式(3.3.6$a$)与式(3.3.6$b$)可见,振幅 $X$ 与零频率位移 $X_0$、阻尼率 $\zeta$ 及频率比 $\gamma$ 都有关,而初相位 $\psi$ 则仅与阻尼率及频率比有关。

和上节一样,定义**放大率** $\beta$ 为

$$\beta \equiv \frac{X}{X_0}$$

则有

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}} \tag{3.3.10}$$

由式(3.3.10)与式(3.3.6b),可见,$\beta$与$\psi$都仅仅依赖于阻尼率$\zeta$与频率比$\gamma$。

为了便于分析,以$\zeta$为参数,分别画出$\beta-\gamma$曲线以及$\psi-\gamma$曲线,如图3.3.2与图3.3.3所示。

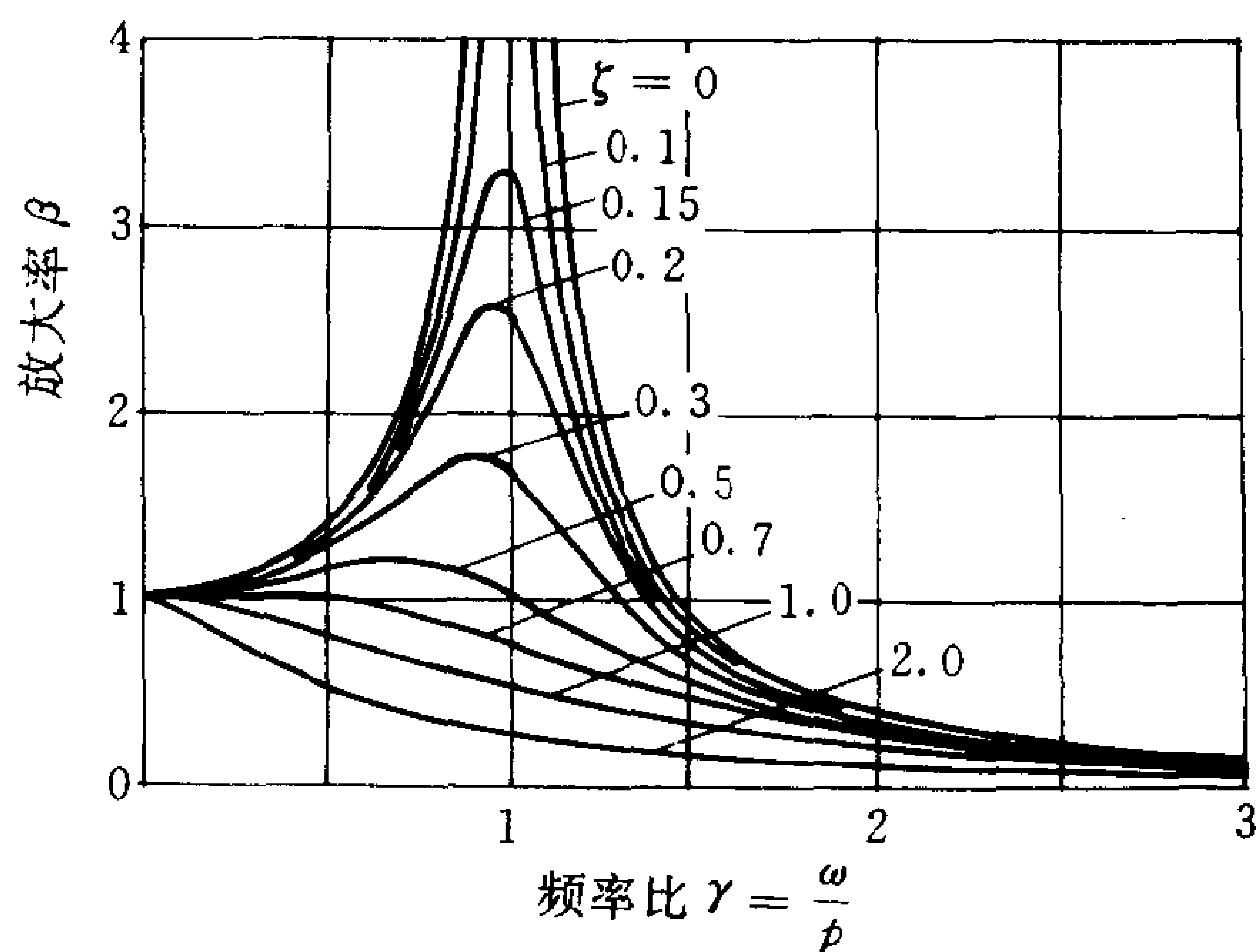



图3.3.2 $\beta-\gamma$曲线

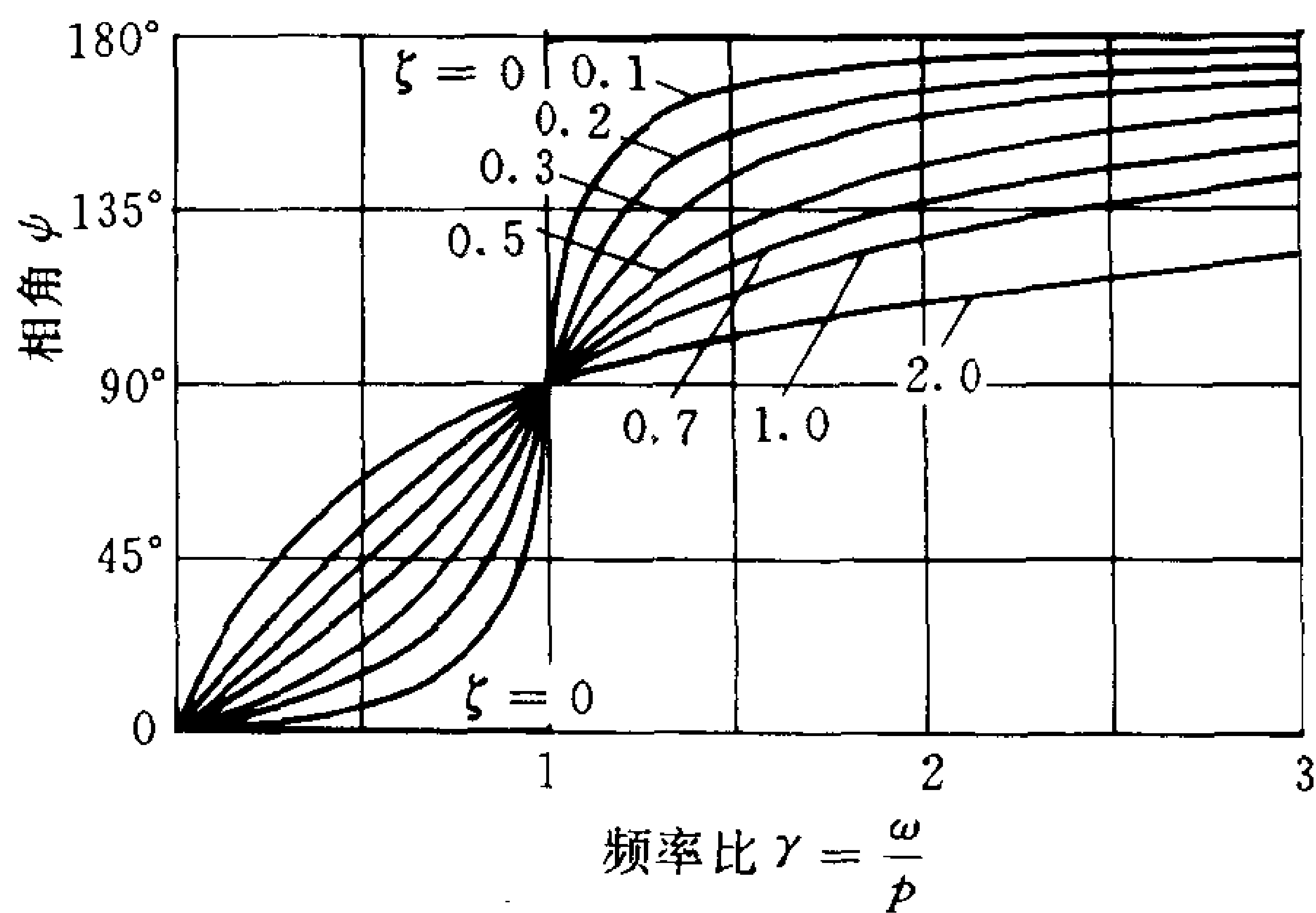



图3.3.3 $\psi-\gamma$曲线

图 3.3.2 也称**幅频特性曲线**，从图上可以看到，当频率比 $\gamma \ll 1$ 时，放大率 $\beta$ 十分接近于1。当频率比 $\gamma \gg 1$，放大率趋近于零。而当频率比 $\gamma \approx 1$ 时，放大率 $\beta$ 相对地大。由式(3.3.10)可见，当 $\gamma = 1$ 时，有

$$\beta = \frac{1}{2\zeta} \tag{3.3.11}$$

对应于阻尼率 $\zeta = 0.2,\ 0.05$ 与 $0.01$，该放大率分别为 $\beta = 2.5$，10 与 50。

严格说来，共振并不出现在 $\gamma = 1$ 处。不难看到，式(3.3.10)的分母在 $\gamma^2 = 1 - 2\zeta^2$ 处具有极小值 $2\zeta\sqrt{(1-\zeta^2)}$。换句话说，当 $\omega = \sqrt{1-2\zeta^2}p$ 时，$\beta$ 取极大值

$$\beta_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{3.3.12}$$

但是在 $\zeta \ll 1$ 的情形下，式(3.3.11)与式(3.3.12)相差甚小，所以，工程上常不加区别，仍说当 $\zeta = 1$，即 $\omega = p$ 时，发生共振。

图 3.3.3 常称为**相频特性曲线**，从图上可以看到，无阻尼情形的相频特性曲线是由 $\psi = 0$ 的直线段与 $\psi = \pi$ 的半直线组成的，在 $\gamma = 1$ 处发生间断。而有阻尼情形的相频特性曲线则是 $\psi$ 在 $0 \sim \pi$ 之间连续变化的光滑曲线，并且不论 $\zeta$ 取值的大小，当 $\gamma = 1$ 时，都有 $\psi = \frac{\pi}{2}$，即所有曲线都交于 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 这一点。这一现象可以用来测定系统的固有频率。利用相位来判断共振的方法常称为**共振相位法**，以区别于利用幅值来判断共振的**共振幅值法**。

现在来看定常强迫振动中的能量平衡。由于阻尼的存在，系统在振动中机械能不断耗散，只有当外界激励不断给系统补充能量，并在能量收支达到平衡时，系统才能维持定常振动。考察激振力与阻尼力在定常强迫振动的一周内所做的功，可以证实这一平衡关系。

激振力 $F = F_0\cos\omega t$ 在定常强迫振动 $x = X\cos(\omega t - \psi)$ 的一

周内所做的功 $\Delta E_1$ 为

$$\Delta E_1 = \oint F \mathrm{d}x$$

考虑到

$$\mathrm{d}x = -\omega X \sin(\omega t - \psi)\mathrm{d}t$$

于是有

$$\begin{aligned}\Delta E_1 &= -\omega X F_0 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\omega t - \psi)\cos\omega t \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2} W X F_0 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [\sin(2\omega t - \psi) - \sin\psi]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\omega X F_0 \left[\frac{1}{2}\cos(2\omega t - \psi) + t\sin\psi\right]\Bigg|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \\ &= \pi X F_0 \sin\varphi\end{aligned}$$

而阻尼力在定常振动一周内所做的功 $\Delta E_2$ 为

$$\begin{aligned}\Delta E_2 &= \oint(-c\dot{x})\mathrm{d}x \\ &= -c\omega^2 X^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t - \psi)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}c\omega^2 X \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [1 + \cos 2(\omega t - \psi)]\mathrm{d}x = -\pi c\omega X^2\end{aligned}$$

考虑到

$$F_0 = X_0 p^2, \qquad c = 2\zeta p$$

由式(3.3.5$b$)不难看到，有

$$\Delta E_1 + \Delta E_2 = 0$$

这就说明了上述能量平衡关系。反过来说，从能量平衡观点出发，就可以得出关系式

$$F_0 \sin\psi = c\omega X$$

从而得到关系式(3.3.5$b$)

$$X_0 p \sin\psi = 2\zeta\omega X$$

注意到，当 $\omega = p$ 时，有 $\psi = \frac{\pi}{2}$，故由上式同样可得出“共振”放大

率 $\beta_r$

$$\beta_r \equiv \frac{X}{X_0}\bigg|_{\omega=p} = \frac{1}{2\zeta}$$

以上都是就强迫振动的定常状态进行讨论的。从系统的幅频特性与相频特性图上可以看到，有阻尼情形与无阻尼情形的显著差别主要表现在共振区内。在这一区域内，阻尼对定常强迫振动振幅的大小有着决定性影响。只要阻尼不为零，系统的共振放大率就只能取有限值。

现在以 $\omega = q = \sqrt{1-\zeta^2}p$ 的情形为例，来看系统在共振区内定常强迫振动的建立过程。

注意到，当 $\omega = q$ 时，有 $\psi \approx \frac{\pi}{2}$，故有

$$\sin\psi \approx 1, \qquad \cos\psi \approx 0$$

且有

$$X \approx \frac{X_0}{2\zeta}$$

对应于零初始条件

$$x_0 = \dot{x}_0 = 0, \qquad t = 0$$

由式(3.3.9)可见，这时方程(3.3.1)的解可近似地表示为

$$x \approx \frac{X_0}{2\zeta}(1 - e^{-\zeta p t})\sin\omega t$$

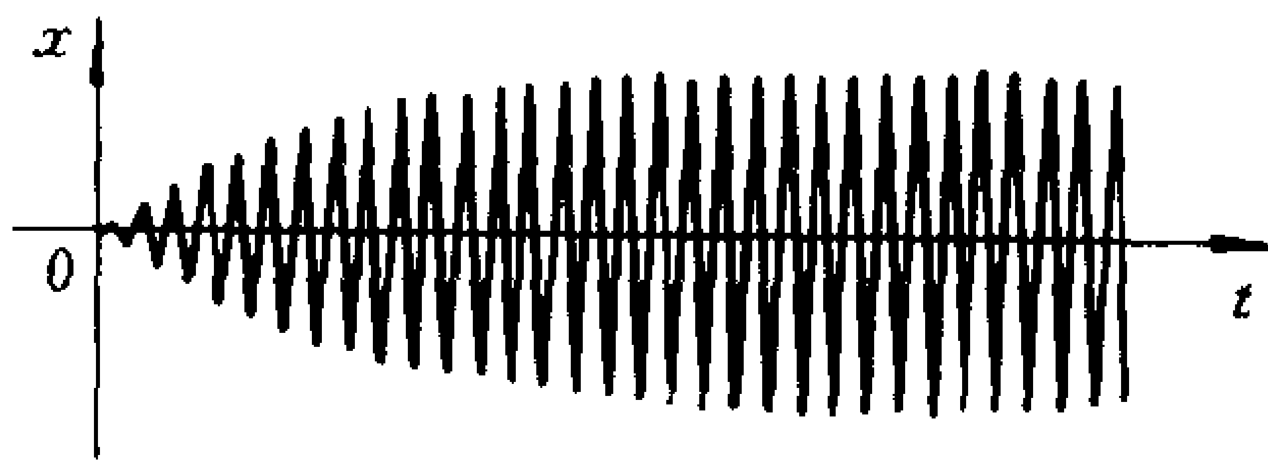



图 3.3.4　线性阻尼情形下共振建立过程

如图 3.3.4 所示，与无阻尼情形的图 3.2.2. 相对照，可以明显地看到线性阻尼对共振建立过程的影响。

## 3.4 定常强迫振动的复数解法与频率响应函数

求解线性阻尼系统在谐和激励作用下的强迫振动时，采用复数形式比三角函数形式更为方便。仍以图 3.3.1 所示系统为例。当系统作用有余弦扰力 $F_0\cos\omega t$ 时，用 $x_1$ 表示系统的位移，得运动微分方程为

$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = F_0\cos\omega t \tag{3.4.1}$$

当系统作用有正弦扰力 $F_0\sin\omega t$ 时，用 $x_2$ 表示系统的位移，得运动微分方程为

$$m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 = F_0\sin\omega t \tag{3.4.2}$$

对式(3.4.2)两端乘以 $\mathrm{j} \equiv \sqrt{-1}$，再将它与式(3.4.1)式相加，得

$$m(\ddot{x}_1 + \mathrm{j}\ddot{x}_2) + c(\dot{x}_1 + \mathrm{j}\dot{x}_2) + k(x_1 + \mathrm{j}x_2) = F_0(\cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t) \tag{3.4.3}$$

利用欧拉表示式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$$

并引入复变量 $x_c$

$$x_c \equiv x_1 + \mathrm{j}x_2 \tag{3.4.4}$$

方程(3.4.3)可写成复数形式

$$m\ddot{x}_c + c\dot{x}_c + kx_c = F_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{3.4.5}$$

方程(3.4.5)右端代表复谐和扰力。我们寻求的是具有同样形式的定常复谐和响应，故可将 $x_c$ 表示为

$$x_c = X_\omega \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{3.4.6}$$

其中 $X_\omega$ 为复数振幅，它取决于 $\omega$ 的取值。由于复谐和函数求导数有着极为简单的规则，即有

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_c &= \mathrm{j}\omega X_\omega \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \\ \ddot{x}_c &= -\omega^2 X_\omega \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{3.4.7}$$

故从方程(3.4.5)很容易求得复谱和响应 $x_c$，而由式(3.4.4)可见，$x_c$ 的实部 $\mathrm{Re}(x_c)$ 就等于系统对余弦扰力的定常响应 $x_1$，而 $x_c$ 的虚部 $\mathrm{Im}(x_c)$ 就等于系统对正弦扰力的定常响应 $x_2$。

将式(3.4.6)与式(3.4.7)代入方程(3.4.5)，两边消去 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，可得

$$(k - m\omega^2 + \mathrm{j}c\omega)X_\omega = F_0$$

即有

$$X_\omega = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + \mathrm{j}c\omega} \tag{3.4.8}$$

将式(3.4.8)右端的分母表示成复指数形式，即写成

$$k - m\omega^2 + \mathrm{j}c\omega \equiv r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \tag{3.4.9}$$

则有

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \\ \psi &= \arctan\frac{c\omega}{k - m\omega^2} \end{aligned}\right\} \tag{3.4.10}$$

将它代入式(3.4.8)，有

$$X_\omega = \frac{F_0}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi}$$

可见，复数振幅 $X_\omega$ 可表示为

$$X_\omega \equiv X\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi} \tag{3.4.11}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{F_0}{r} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \\ \psi &= \arctan\frac{c\omega}{k - m\omega^2} \end{aligned}\right\} \tag{3.4.12}$$

$X$ 即复数振幅的模，而 $-\psi$ 为其相角。如引入记号

$$X_0 \equiv \frac{F_0}{k}, \qquad p^2 \equiv \frac{k}{m}$$

$$\zeta = \frac{C}{2\sqrt{km}}, \qquad \gamma = \frac{\omega}{p}$$

则式(3.4.12)即可写成

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{X_0 p^2}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+(2\zeta p\omega)^2}} = \frac{X_0}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}} \\ \tan\psi &= \frac{2\zeta p}{p^2-\omega^2} = \frac{2\zeta\gamma}{1-\gamma^2} \end{aligned}\right\}$$

它与式(3.3.6)完全一致。将式(3.4.11)代入式(3.4.6)，从其实部与虚部分别可得

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X\cos(\omega t-\psi) \\ x_2 &= X\sin(\omega t-\psi) \end{aligned}\right\} \tag{3.4.13}$$

对应于定常强迫振动

$$x_c = X\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\psi)}$$

方程(3.4.5)可写成

$$-(-m\omega^2+\mathrm{j}c\omega+k)X\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\psi)}+F_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=0 \tag{3.4.14}$$

复谐和函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 可以用复平面上的单位旋转矢量来表示，这一矢量的模等于1，并以角速度 $\omega$ 绕原点转动，如图 3.4.1 所示。而复谐和函数的时间导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\frac{\pi}{2})}$$

也可以用一个旋转矢量来表示，它是和上述单位矢量一起同步旋转的矢量，不过它的模等于 $\omega$，相位超前 $\frac{\pi}{2}$。同样地，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 的二次导数

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = -\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\pi)}$$

也是和上述单位矢量一起同步旋转的矢量，只是它的模为 $\omega^2$，并且相位较 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 超前 $\pi$。

因此，方程(3.4.14)中的每一项都可以用一个旋转矢量来表示，而方程(3.4.14)本身可以看做一个矢量等式。式中的全体矢

量刚好构成一个封闭的矢量多边形，它作为一个整体以角速度 $\omega$ 绕复平面上的原点转动，如图 3.4.2 所示。

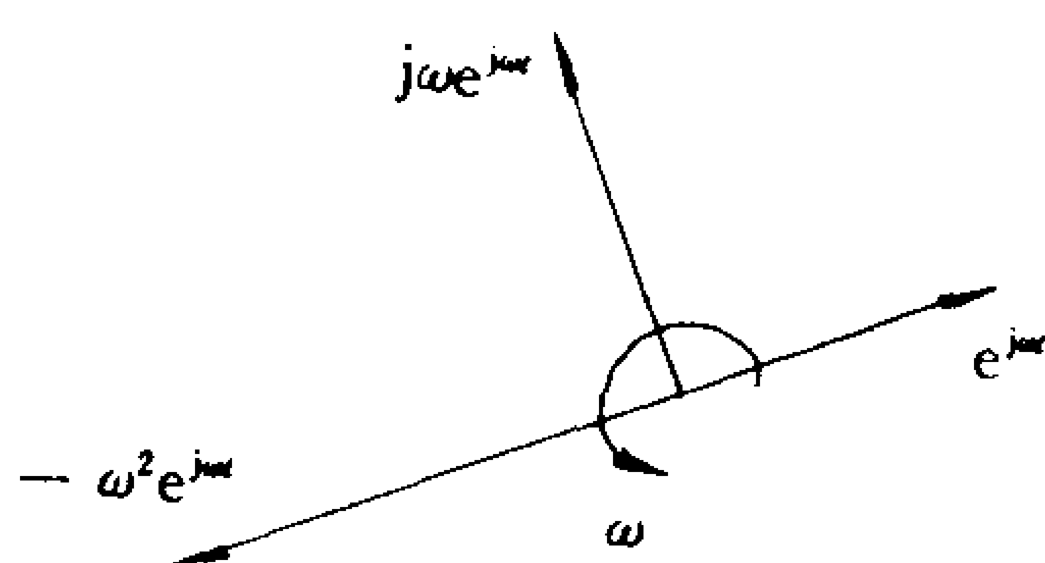



图 3.4.1 复谐和函数的旋转矢量表示

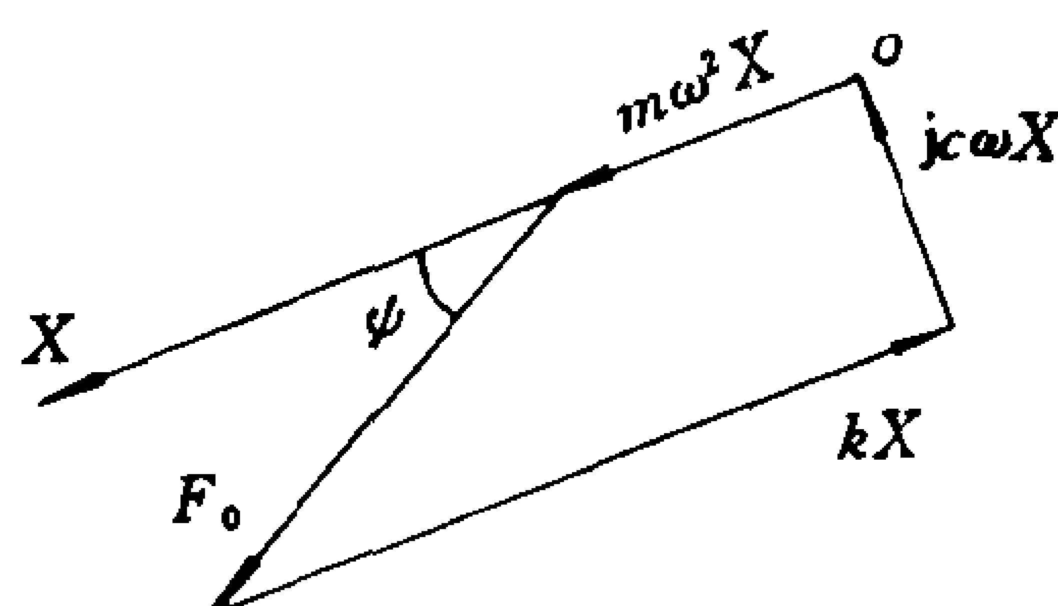



图 3.4.2 方程(3.4.14)的旋转矢量表示

图 3.4.3 中分别画出了对应于 $\omega < p$，$\omega = p$，$\omega > p$ 三种情形的矢量多边形。

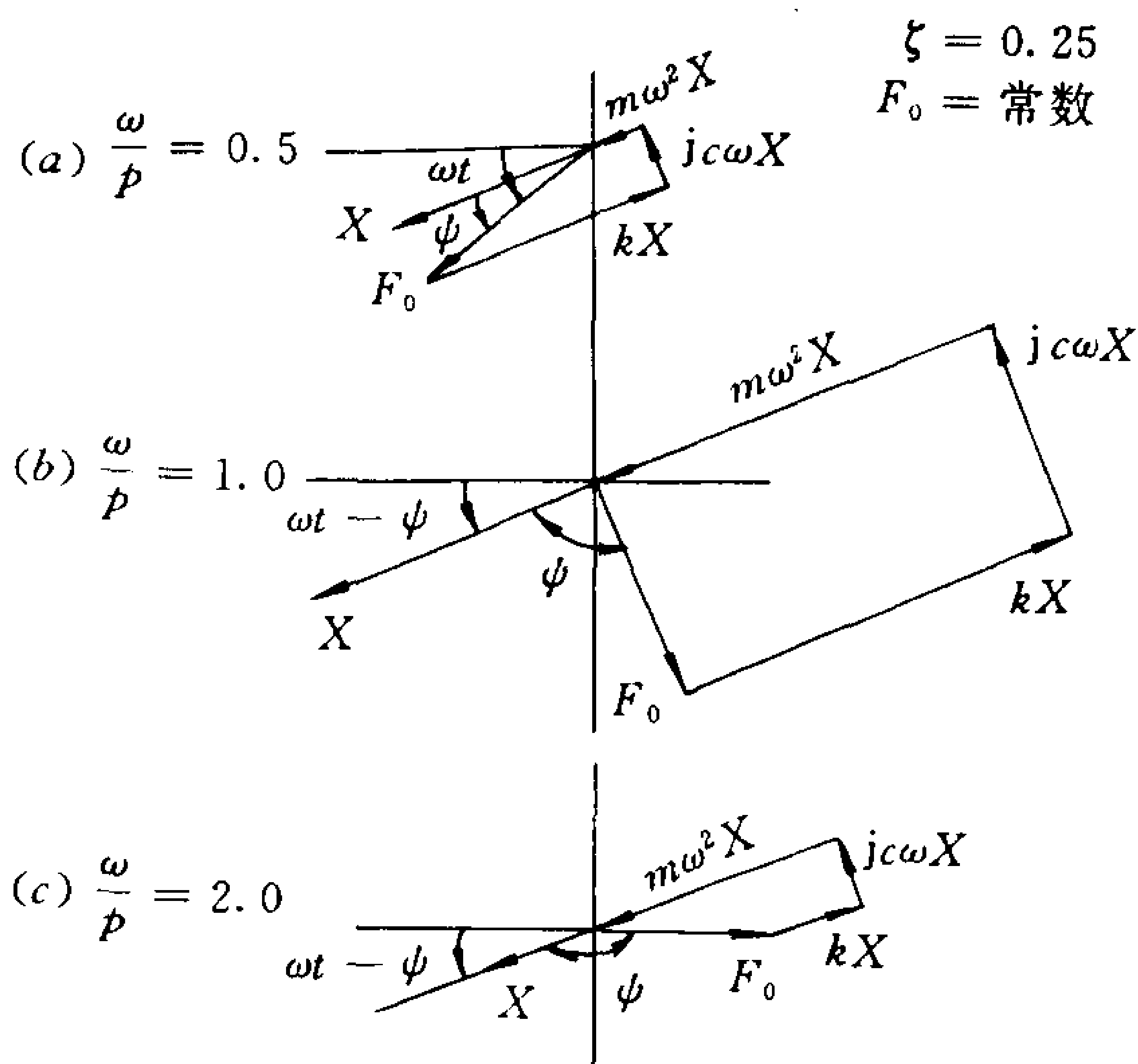



图 3.4.3 $\omega < p$，$\omega = p$，$\omega > p$ 情形下的矢量多边形

从力学观点来看，方程(3.4.14)中每一项代表一个复数力。方程左端第一项对应于惯性力，第二项对应于阻尼力，第三项对应于弹性恢复力，而最后一项对应于谐和扰力。从图 3.4.3 可以看到，当 $\omega < p$ 时，惯性力的模小于弹性力的模，所以相位差 $\psi < \frac{\pi}{2}$；当 $\omega = p$ 时，惯性力与弹性力平衡，相位差 $\psi = \frac{\pi}{2}$；当 $\omega > p$ 时，惯性力的模大于弹性力的模，故相位差 $\psi > \frac{\pi}{2}$。图 3.4.4 还画出了 $\omega \ll p$ 与 $\omega \gg p$ 的情形。从图上不难作出解释，为什么当 $\omega \ll p$ 时，放大率 $\beta$ 接近于 1；为什么当 $\omega \gg p$ 时，放大率 $\beta$ 接近于零。

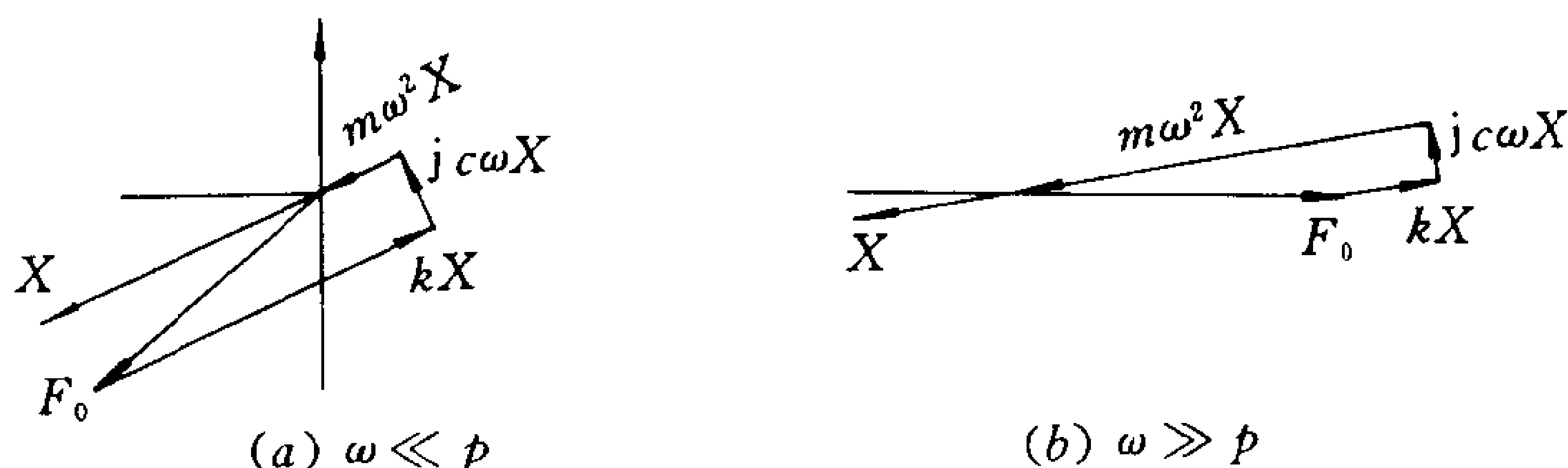



图 3.4.4 $\omega \ll p$ 与 $\omega \gg p$ 情形下的矢量多边形

系统的复谐和响应与复谐和激励之比，常称为系统的**频率特性**或**频率响应函数**。设系统的激振力为 $F = F_0 e^{j\omega t}$，相应的位移响应为 $x_c = X_\omega e^{j\omega t}$，则系统的**位移频率特性** $H_d(\omega)$ 可表示为

$$H_d(\omega) \equiv \frac{x_c}{F} = \frac{X_\omega}{F_0}$$

由式(3.4.8)可得上述线性阻尼系统的频率特性为

$$H_d(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + jc\omega}$$

由于上述 $H_d(\omega)$ 具有柔度的量纲，故亦称**动柔度**。相应地，它的倒数

$$Z_d(\omega) \equiv \frac{F}{x_c} = \frac{F_0}{X_\omega}$$

就称为**动刚度**。1 自由度线性阻尼系统的动刚度为

$$Z_d(\omega) = k - m\omega^2 + \mathrm{j}c\omega$$

参照电学中阻抗与导纳的概念，$Z_d(\omega)$ 亦可称为**位移阻抗**；相应地，$H_d(\omega)$ 就可称为**位移导纳**。

如果把 $x_0 \equiv \dfrac{F}{k}$ 看做系统的输入，而仍把 $x_c$ 看做输出，那就可以得到系统的无量纲位移频率特性

$$\widetilde{H}_d(\omega) \equiv \frac{x_c}{x_0} = \frac{X}{X_0}$$

对于 1 自由度线性阻尼系统，就有

$$\widetilde{H}_d(\omega) = \frac{X}{X_0} = \frac{1}{(1-\gamma)^2 + \mathrm{j}2\zeta\gamma}$$

可以看到，它的模 $|\widetilde{H}_d(\omega)|$ 就等于放大率 $\beta$。

现在来看 1 自由度线性阻尼系统对复谐和激励的定常速度响应与加速度响应。由式(3.4.8)可知，系统的定常位移响应为

$$x_c = X_\omega \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + \mathrm{j}c\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

故系统的定常速度响应与加速度响应分别为

$$\dot{x}_c = \mathrm{j}\omega X_\omega \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \frac{\mathrm{j}\omega F_0}{k - m\omega^2 - \mathrm{j}c\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$\ddot{x}_c = -\omega^2 X_\omega \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \frac{-\omega^2 F_0}{k - m\omega^2 + \mathrm{j}c\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

因而系统的速度频率特性与加速度频率特性分别为

$$H_v(\omega) = \frac{\mathrm{j}\omega}{k - m\omega^2 + \mathrm{j}c\omega}$$

$$H_a(\omega) = \frac{-\omega^2}{k - m\omega^2 + \mathrm{j}c\omega}$$

速度频率特性 $H_v(\omega)$ 亦称**速度导纳**。它的倒数

$$Z_v(\omega) = \frac{k - m\omega^2 + \mathrm{j}c\omega}{\mathrm{j}\omega}$$

称为**速度阻抗**。加速度频率特性 $H_a(\omega)$ 亦称**加速度导纳**。它的倒数

$$Z_a(\omega) = -\frac{1}{\omega^2}(k - m\omega^2 + \mathrm{j}c\omega)$$

称为**加速度阻抗**。

以上定义了系统关于位移、速度、加速度的三种阻抗以及三种导纳，它们统称力学阻抗，也称机械阻抗。虽然我们只就1自由度线性系统给出了力学阻抗的表示式，但上述力学阻抗的定义本身也适用于多自由度线性系统。

对于1自由度线性阻尼系统，令 $x_0 = \frac{F}{k} = X_0 e^{\mathrm{j}\omega t}$，无量纲的速度导纳与加速度导纳可定义如下

$$\widetilde{H}_v(\omega) \equiv \frac{\dot{x}_c}{\mathrm{j}px_0} = \frac{\gamma}{(1-\gamma^2)^2 + \mathrm{j}2\zeta\gamma}$$

$$\widetilde{H}_a(\omega) \equiv \frac{\ddot{x}_c}{-p^2x_0} = \frac{\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2 + \mathrm{j}2\zeta\gamma}$$

$\widetilde{H}_v(\omega)$ 的模可称为速度放大率，记为 $\beta_v$，有

$$\beta_v = \frac{\gamma}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}}$$

$\widetilde{H}_a(\omega)$ 的模可称为加速度放大率，记为 $\beta_a$，有

$$\beta_a = \frac{\gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}}$$

而3.3节中所说的放大率 $\beta$ 实际上是位移放大率。从速度放大率 $\beta_v$ 的表示式可以看到，当 $\gamma = 1$（即 $\omega = p$）时，$\beta_v$ 取极大值

$$\beta_{v\max} = \frac{1}{2\zeta}$$

这就是说，不论系统有无阻尼，也不论阻尼有多大，系统的速度共振将准确地发生在扰频与固有频率相等的情形。

# 3.5　周期激励下的定常强迫振动

## 3.5.1　傅里叶级数

前面在讨论系统的强迫振动时，总是假定系统扰力是谐和的，实际的扰力往往是更复杂的时间函数。工程上常遇到扰力是周期函数的情形。周期函数是周期地重复取值的函数，可表示为

$$f(t \pm nT) = f(t), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

式中 $T$ 称为周期，它是函数重复一次所需的最短时间。可以看到，任何频率为 $\Omega$ 的谐和函数都是 $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ 的周期函数。但是，周期函数不限于谐和函数。在讨论系统对周期扰力的响应之前，先来看周期函数的傅里叶级数表示。

实践中遇到的周期函数，几乎都可以表示成如下形式的傅里叶级数①

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\omega t), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3.5.1}$$

式中 $T$ 为周期，$\Omega = \dfrac{2\pi}{T}$ 是基本频率，简称基频；对应于基频的谐和分量称为**基频分量**，简称基波；对应于基频的整数倍频率的谐和分量称为**高谐分量**，简称谐波；具体地对应于 $2\Omega, 3\Omega, \cdots$ 的分量分别称为二次谐波、三次谐波等等。

上述傅里叶级数中各个谐和分量的系数称为傅里叶系数。利用三角函数的正交性，它们可以求得如下：

---

① 严格地说，可以展开成傅里叶级数周期函数必须满足所谓狄利克雷条件：函数在其定义域上是有界的，并在一个周期内只具有有限个不连续点与极值点。

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{d}t \tag{3.5.2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\Omega t\mathrm{d}t,\ n = 1,\ 2,\ \cdots \tag{3.5.3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\Omega t\mathrm{d}t,\ n = 1,\ 2,\ \cdots \tag{3.5.4}$$

傅里叶级数也可以表示成复数形式。利用欧拉公式，正弦与余弦函数可分别表示为

$$\sin\theta = \frac{-\mathrm{j}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})}{2}, \qquad \cos\theta = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})}{2}$$

将上式代入式(3.5.1)，有

$$x(t) = \frac{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}) - \mathrm{j}b_n(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}]}{2}$$

$$= \frac{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n - \mathrm{j}b_n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t} + (a_n + \mathrm{j}b_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}]}{2}$$

引入记号

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\quad c_n = \frac{a_n - \mathrm{j}b_n}{2},\quad c_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{j}b_n}{2}$$

式(3.5.1)可改写为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t} \tag{3.5.5}$$

且有

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t \tag{3.5.6}$$

$c_n$ 一般为复数，因而可表示为

$$c_n = |c_n|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}$$

若给定的周期函数有某种对称性，则其傅里叶分析可进一步简化。例如：

(1) 设为偶函数,即有 $f(t)=f(-t)$,则式(3.5.1)中只剩下常数项与余弦项,即有 $b_n=0$;

(2) 设为奇函数,即有 $f(t)=-f(-t)$,则式(3.5.1)中只剩下正弦项,即有 $a_0,a_n=0$;

(3) 设周期为 $T$ 的函数,且满足 $f\left(t\pm\frac{T}{2}\right)=f(t)$,则其傅里叶展式中只含偶次谐波;

(4) 设周期为 $T$ 的函数,且满足 $f\left(t\pm\frac{T}{2}\right)=-f(t)$,则其傅里叶展式中只含奇次谐波。

**例 3.5.1** 设有图 3.5.1 所示周期为 $T$ 的周期函数 $f(t)$,试求傅里叶展式。

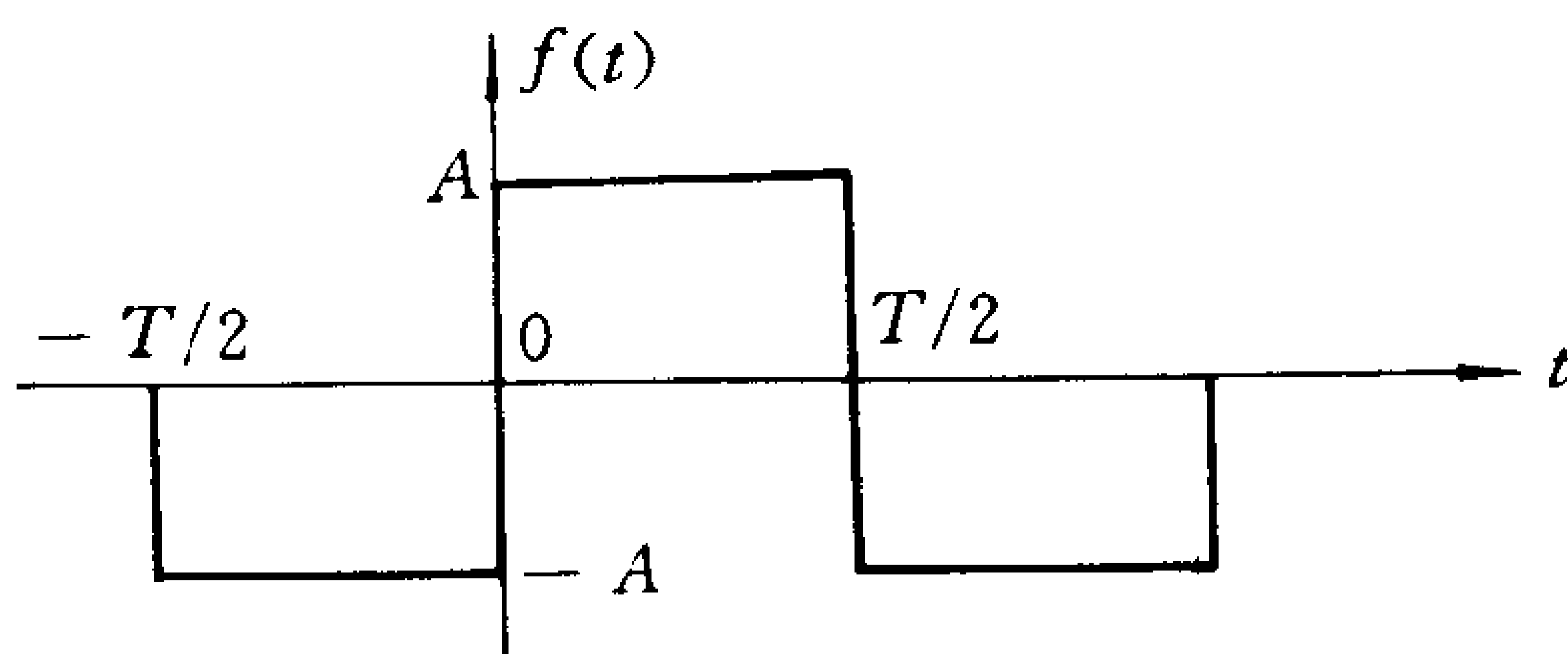



图 3.5.1 矩形波 $f(t)$

**解** 在一个周期内,$f(t)$ 可表示为

$$f(t)=\begin{cases}A, & 0<t<\dfrac{T}{2}\\ -A, & -\dfrac{T}{2}<t<0\end{cases}$$

由于 $f(t)$ 为奇函数,故有

$$a_n=0,\qquad n=0,1,2,\cdots$$

由于 $f\left(t\pm\frac{T}{2}\right)=-f(t)$,故有

$$b_n=0,\qquad n=2,4,6,\cdots$$

仅当 $n$ 为奇数时，由式(3.5.4)，有

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin 2\pi n \frac{t}{T}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} A\sin 2\pi n \frac{t}{T}\mathrm{d}t = \frac{4A}{n\pi}, \quad n = 1、3, 5,\cdots$$

所以，$f(t)$ 的傅里叶展开式为

$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1,3,5}\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi n}{T}t$$

为了更形象地显示傅里叶分析的结果，在本例中可以将 $b_n$ 随频率 $\omega$ 的变化关系表示为图 3.5.2 所示。它由一系列离散在 $\Omega$ 的奇整数倍处的垂直线段组成，各线段的长度分别取为 $b_n$。这类图称为傅里叶离散谱，也称线谱。在一般情形下，可分别取 $|c_n|$ 与 $\psi_n$ 作为纵坐标，而取 $\omega$ 作为横坐标，画出相应的傅里叶幅频谱与相频谱。所以，傅里叶分析也称谱分析。

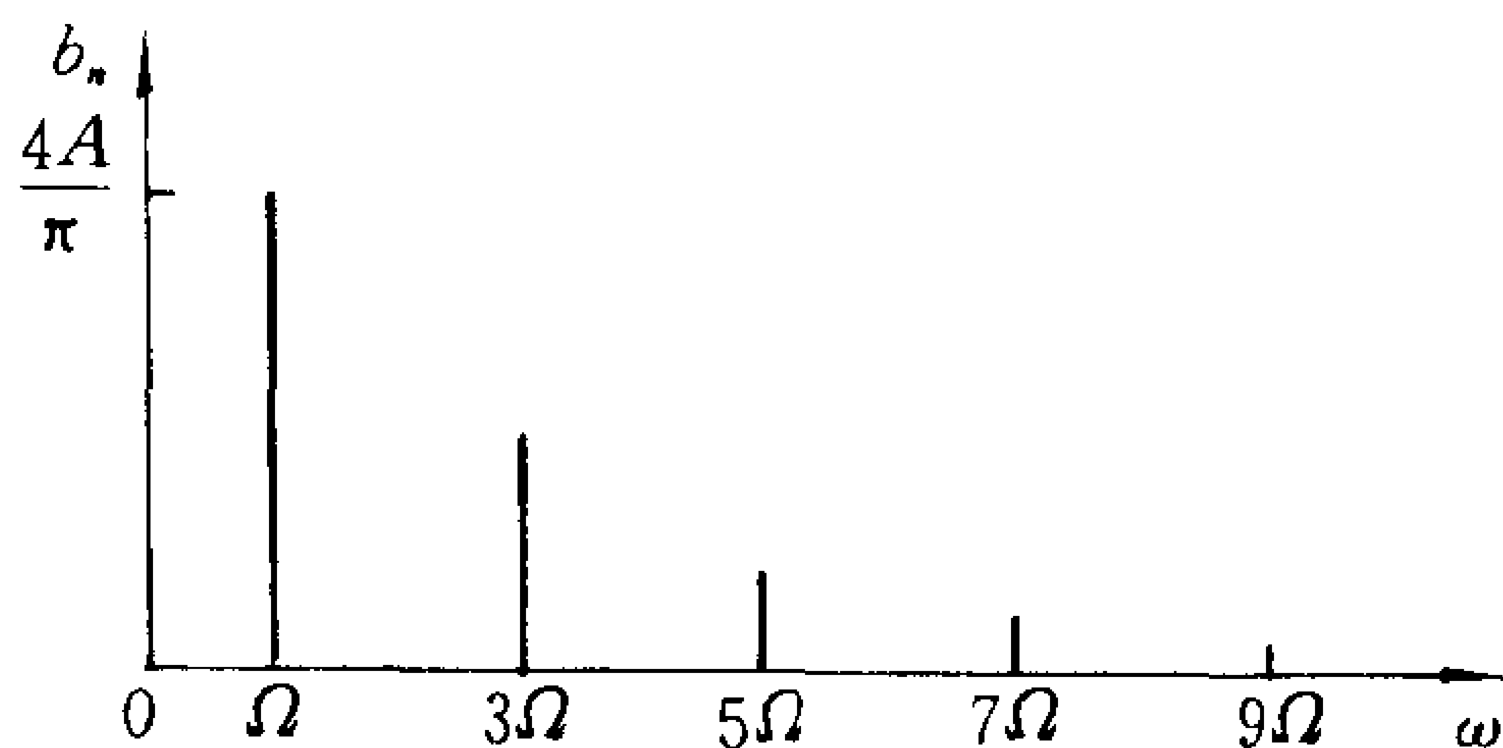



图 3.5.2　$f(t)$ 的频谱

注意，周期函数所对应的谱总是离散谱。但随着周期 $T$ 的不断增大，$\Omega = \frac{2\pi}{T}$ 将不断减小，离散频谱的谱线间距将愈来愈小。在 $T \to \infty$ 的极限情形，周期函数将失去周期性，而离散频谱将转化为连续频谱。这时，傅里叶级数将转化为傅里叶积分。关于这种情形，将在下一章讨论非定常响应时作进一步介绍。

顺便指出，线性系统中的定常运动，除周期运动外，还有拟周

期运动。简单地说，**拟周期运动**是由具有不可通约基本频率(例如取有理数与无理数)的两个或两个以上的周期运动合成的结果。它所对应的频谱也是离散谱。

借助于数字计算机，可以高效地实现傅里叶分析。特别是快速傅里叶变换(FFT)算法在60年代中期问世以来，傅里叶分析技术已日趋完善与普及。

### 3.5.2　强迫振动的一般表示式

现考察1自由度线性阻尼系统在任意的周期扰力 $f(t)$ 作用下的定常强迫振动。这时，系统的运动微分方程可表示为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{3.5.7}$$

上一小节3.5.1中已经说明，任意的周期力 $f(t)$ 总可以展开为傅里叶级数，即式(3.5.1)。级数中除了一个常力分量外，其余每个分量都是一个简谐力。根据叠加原理，上述系统由周期力 $f(t)$ 引起的强迫振动可以由各个分量所引起的强迫振动叠加而得。由式(3.4.12)与式(3.4.13)，上述系统在简谐扰力 $a_n\cos n\Omega t$ 与 $b_n\sin n\Omega t$ 分别作用下，相应的定常强迫振动 $x_{n1}$ 与 $x_{n2}$ 可表示为

$$x_{n1} = \beta_n\left(\frac{a_n}{k}\right)\cos(n\Omega t - \psi_n) \tag{3.5.8}$$

$$x_{n2} = \beta_n\left(\frac{b_n}{k}\right)\sin(n\Omega t - \psi_n) \tag{3.5.9}$$

其中

$$\beta_b = [(1 - n^2\gamma^2)^2 + (2\zeta n\gamma)^2]^{-1/2},\quad \gamma = \frac{\Omega}{p} \tag{3.5.10}$$

$$\psi_n = \arctan\frac{2\zeta n\gamma}{1 - n^2\gamma^2} \tag{3.5.11}$$

因此，上述系统在任意周期扰力 $f(t)$ 作用下的定常强迫振动可表示为

$$x=\frac{a_0}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left\{\frac{a_n}{k}\cos(n\Omega t-\psi_n)+\frac{b_n}{k}\sin(n\Omega t-\psi_n)\right\}\tag{3.5.12}$$

**例 3.5.2**　设有刚度为$k$,固有频率为$p$的无阻尼1自由度系统,受到例3.5.1中给定的周期扰力作用,设扰力基频$\Omega=\frac{p}{6}$。试求系统的定常强迫振动,并画出相应的幅频谱图。

**解**　由例3.5.1已知该周期扰力可展开为如下傅里叶级数

$$f(t)=\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{1}{n}\sin n\Omega t\tag{a}$$

在它的作用下,系统的定常强迫振动,按式(3.5.12),可表示为

$$x(t)=\frac{4A}{\pi k}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{\beta_n}{n}\sin n\Omega t\tag{b}$$

其中

$$\beta_n=\left[1-\left(\frac{n}{6}\right)^2\right]^{-1},\quad n=1,3,5,\cdots$$

取无量纲幅值$B_n$为

$$B_n=\left|\frac{\beta_n}{n}\right|$$

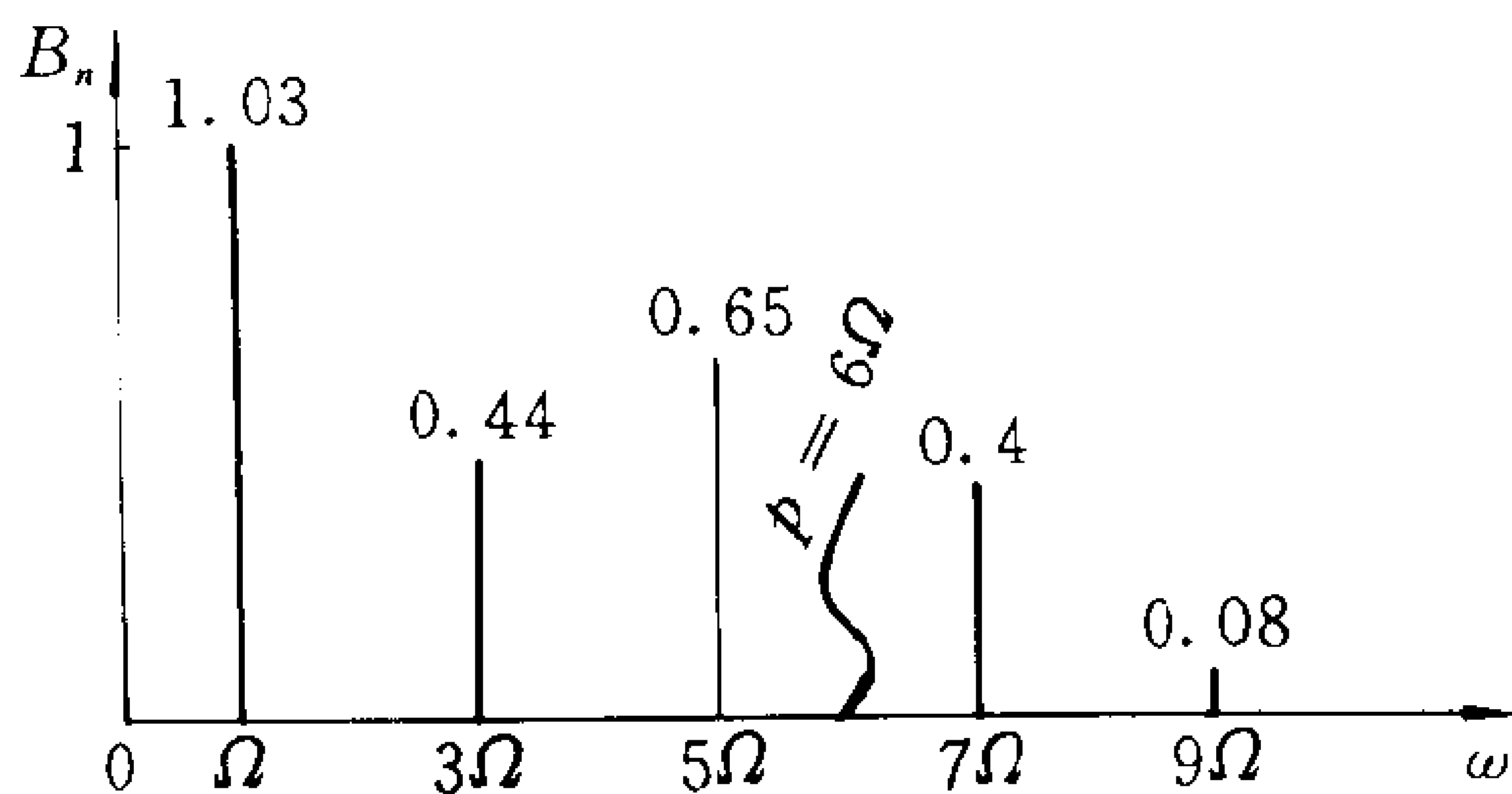



图 3.5.3　响应频谱

$B_n$随$\omega$的变化关系如图3.5.3所示,此即定常响应的幅频谱图,它

也是离散频谱。和图 3.5.2 相比,可见,只有在扰频接近于系统固有频率的那些扰力分量对系统的定常响应有较大的影响。当激励具有离散频谱时,系统的定常响应也具有离散频谱,这是线性系统的一种频域固有属性。

## 3.6 测振原理

本节讨论惯性式测振仪的工作原理。惯性式测振仪有两类:一类是测振动物体的位移的,称为位移计;一类是测振动物体的加速度的,称为加速度计。无论是位移计还是加速度计,它们的力学模型都可以采用 1 自由度线性阻尼系统,如图 3.6.1 所示。测振仪的壳体固连在振动物体上,随振动物一起运动,拾振质量 $m$ 相对于壳体作相对运动。在相对运动中,系统的输入是壳体运动引起的惯性力,而系统的输出则是质量 $m$ 的相对位移。分析结果表明:在低频段($\omega \ll p$),系统的输出成比例逼近于振动物体的加速度;而在高频段($\omega \gg p$),系统的输出成比例逼近于振动物体的位移。因此,这一原理被分别用来设计加速度计与位移计。

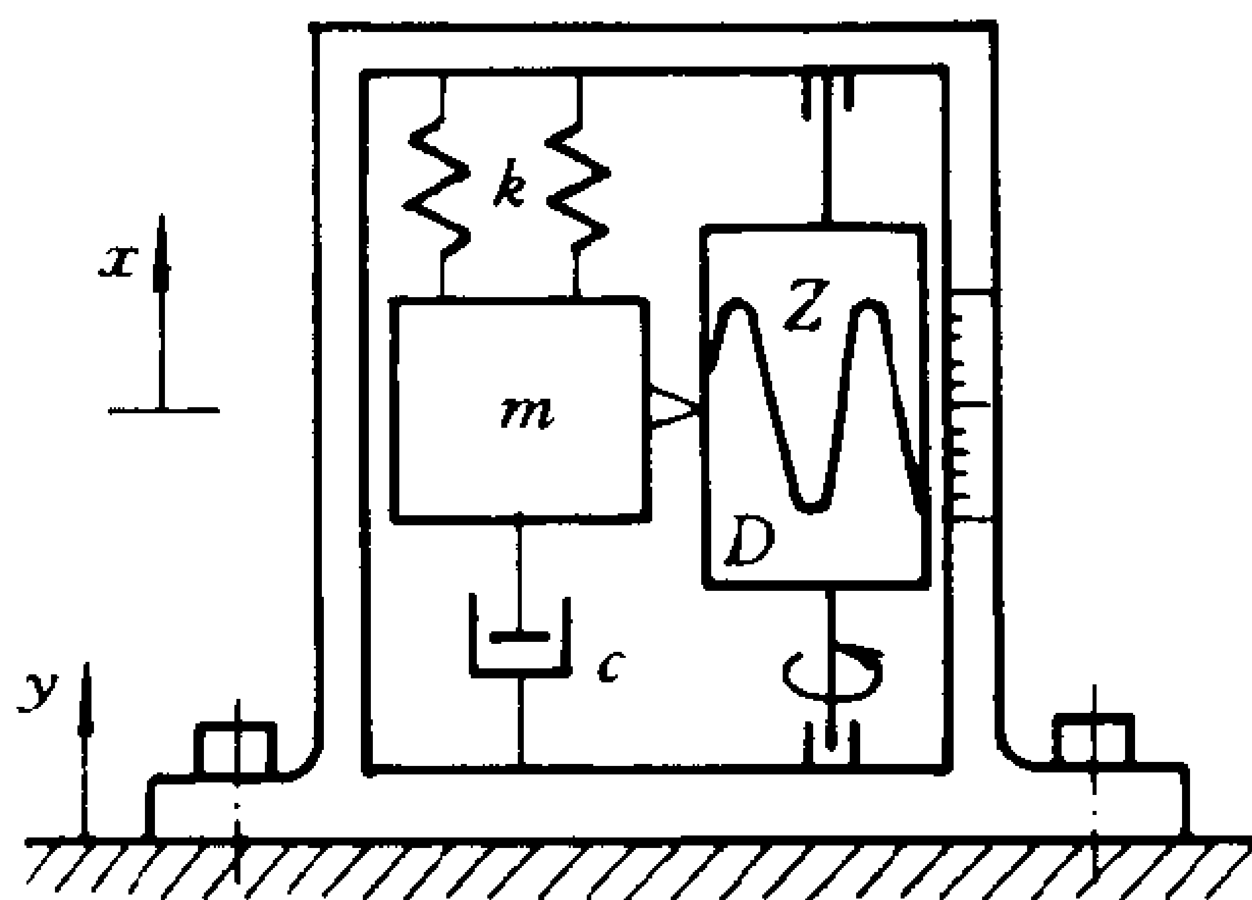



图 3.6.1 测振仪原理图

设待测物体的运动可表示为 $y = Y\cos\omega t$。取质量 $m$ 的相对平衡位置为坐标原点,用 $z$ 表示质量的相对位移,则由相对运动的牛顿定律,可得系统的运动微分方程为

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y\cos\omega t \qquad (3.6.1)$$

可见,上式与方程(2.3.1)形式相同,只是力幅已改为 $m\omega^2 Y$,因而

方程(3.6.1)的特解(它代表定常振动)可直接写出为

$$z = Z\cos(\omega t - \psi) \tag{3.6.2a}$$

其中

$$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{Y\gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}}$$
$$= Y\gamma^2\beta = Y\beta_a \tag{3.6.2b}$$

$$\tan\psi = \frac{c\omega}{k - m\omega} = \frac{2\zeta\gamma}{1-\gamma^2} \tag{3.6.2c}$$

可以看到,这一情形下的相对位移放大率$\dfrac{Z}{Y}$与3.4节中提到的加速度放大率 $\beta_a$ 相同。$\dfrac{Z}{Y}$随 $\gamma$ 的变化曲线如图3.6.2所示。

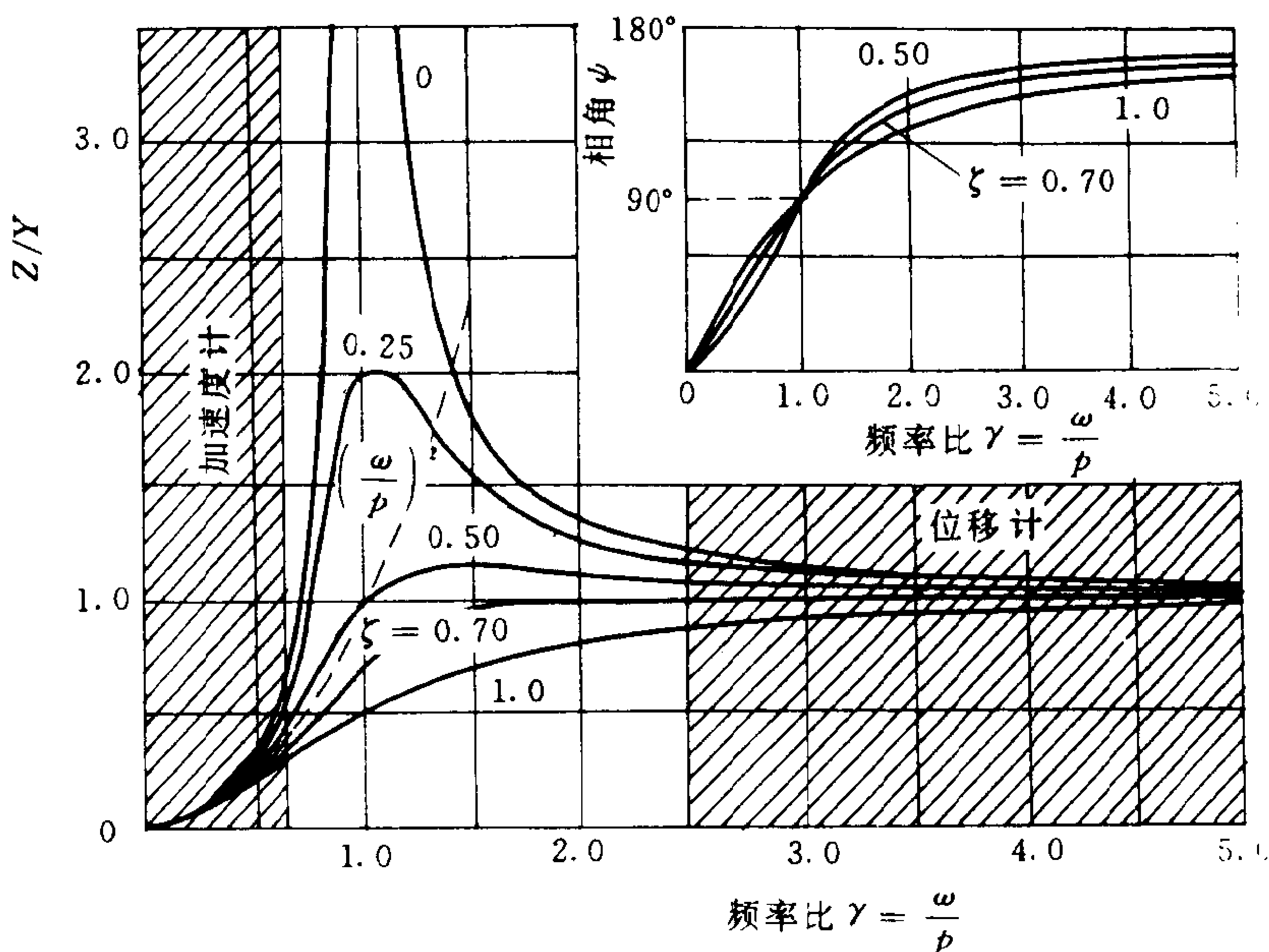



图 3.6.2 $\dfrac{Z}{Y}$-$\gamma$ 曲线

**位移计**　通常,位移计的阻尼总是设计成充分小,因而可略去不计。从图3.6.2可以看到,在$\gamma > 3$(即$\omega > 3p$)的频带上,相对位移放大率接近于1,而相位差接近于$\pi$,因而有

$$z \approx -Y\cos\omega t$$

就是说,拾振质量$m$的相对运动与待测物体的振动仅仅相差一个相角$\pi$。这就是位移计的工作原理。因为它要求位移计的固有频率必须远小于待测振动频率,这就给低频测振带来了困难。例如,当待测频率为1 Hz时,位移计的固有频率可取为$\frac{1}{3}$Hz,则由公式$p=\sqrt{g/\delta}$,有

$$\delta = \frac{g}{p^2} = \frac{980 \times 3^2}{(2\pi)^2} = 223.4\ \mathrm{cm}$$

这就要求位移计的质量相当大,而且弹簧刚度要相当小。考虑到位移计质量相对大时,就会影响待测物体的振动,所以这类位移计通常只用于测大物体的振动,例如地震、船舶振动等。

**加速度计**　从式(3.6.2$b$)还可以看到,当$\gamma \ll 1$(即$\omega \ll p$)时,$\beta$接近于1,因而有$\frac{Z}{Y} \approx \gamma^2 = \frac{\omega^2}{p^2}$。这时,拾振质量$m$的相对位移近似地为

$$z \approx \frac{1}{p^2}\omega^2 Y\cos(\omega t - \psi)$$

它与振动物体的加速度$\ddot{y} = -\omega^2 Y\cos\omega t$相比,在幅值上只相差一个比例系数$(-1/p^2)$,在相位上则滞后一个$\psi$角。因此,它可以用来构成加速度计。可见,加速度计的固有频率必须远大于待测振动频率。但从上式可以看到,加速度计的灵敏度$(Z/\omega^2 Y)$与$p^2$成反比,所以加速度计的固有频率又不能取得太大。

为了更清楚地看到当$\gamma \ll 1$时,放大率$\beta$随$\gamma$的变化情况,我们将这一区域内的$\beta - \gamma$曲线以放大的比例尺画出,如图3.6.3所示。

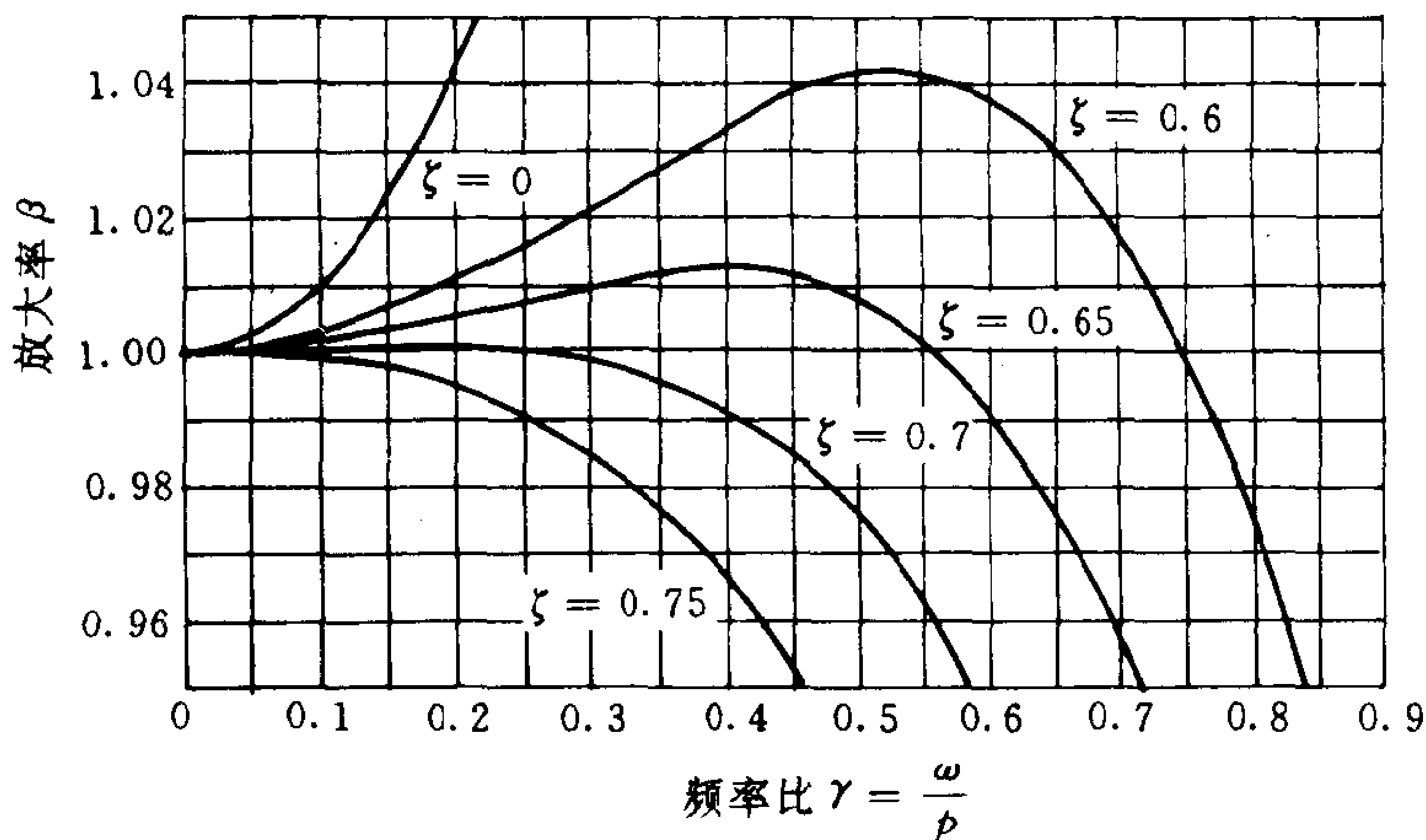



图 3.6.3 $\gamma \ll 1$ 时的 $\beta - \gamma$ 曲线

从图上可以看到，当阻尼为零（即 $\zeta = 0$）时，随着 $\gamma$ 的增大，$\beta$ 很快增大；给系统添加阻尼，有助于克服这一倾向，这是因为 $\beta$ 表示式的分母根号内 $(1 - \gamma^2)^2$ 项的减小，由于有 $(2\zeta\gamma)^2$ 项的增大而得到补偿。从图上可以看到，这种补偿作用当 $\zeta$ 接近于 0.7 时，效果最佳；这时，在 $0 \leqslant \gamma < 0.3$ 的频带上，$\beta$ 值始终非常逼近于 1。再继续增大阻尼，$\beta$ 值又将因过分补偿而迅速减小。所以，为了尽可能扩大加速度计的量程，一般都把阻尼设计成 $\zeta$ 取值于 0.7 左右。事实上，这样做不仅仅能扩大量程，而且对于减小相位畸变也具有决定性作用。因为所测物体的振动可能不是纯正弦形的，例如一般的周期振动，除了频率为 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ 的基波外，还含有频率为 $\omega$ 整数倍的高次谐波；要使记录的波形如实地反映所测振动的波形，必须使记录的高次谐波的相位差等于基波相位差 $\psi$ 的整数倍，从图 3.6.2

中的$\psi-\gamma$曲线可以看到,当$\zeta=0.7$时,在$\gamma<1$的频带内,$\psi-\gamma$曲线相当逼近于直线段,即有$\psi=\frac{\pi}{2}\gamma$。这样,当加速度计的$\zeta$值取0.7时,就可避免产生相位畸变。

压电晶体加速度计利用的也是这一测振原理。这类加速度计的示意图如图3.6.4所示。晶体的特点是两端面受压后会产生相应的电量。如果把晶体看做一个弹簧,那末它在端面上所受的压力就正比于拾振质量$m$的相对位移。因此,当$\omega\ll p$时,输出的电信号就正比于所测振动的加速度。

和位移计相反,加速度计的固有频率相对地高得多,故易于做到重量轻、体积小。这样,仪器本身重量对振动物体的影响也就小到往往可以略去不计。

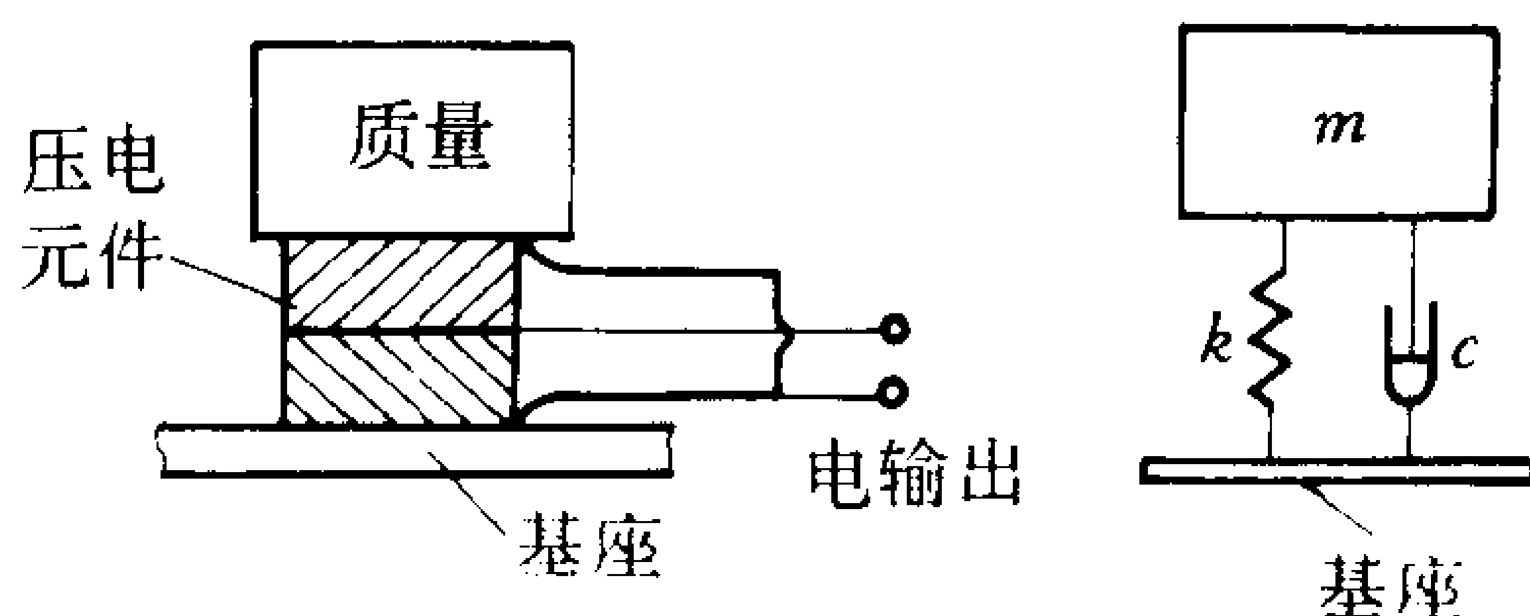



图3.6.4　压电加速度计原理图

## 3.7　隔振原理

振动隔离有两方面的含义:一方面是精密机械、仪器、仪表要防止从基础传来的振动;另一方面是要减小振动机械对基础的作用。前者称为**运动隔振**,后者称为**力隔振**。因为它们的隔振原理是统一的,所以在同一节里来讨论。

### 3.7.1 运动隔振

隔振系统的最简化模型可表示为图 3.7.1 所示的 1 自由度线性阻尼系统，其中质量 $m$ 代表精密仪器装备，隔振装置用弹簧 $k$ 与阻尼器 $c$ 来表示。

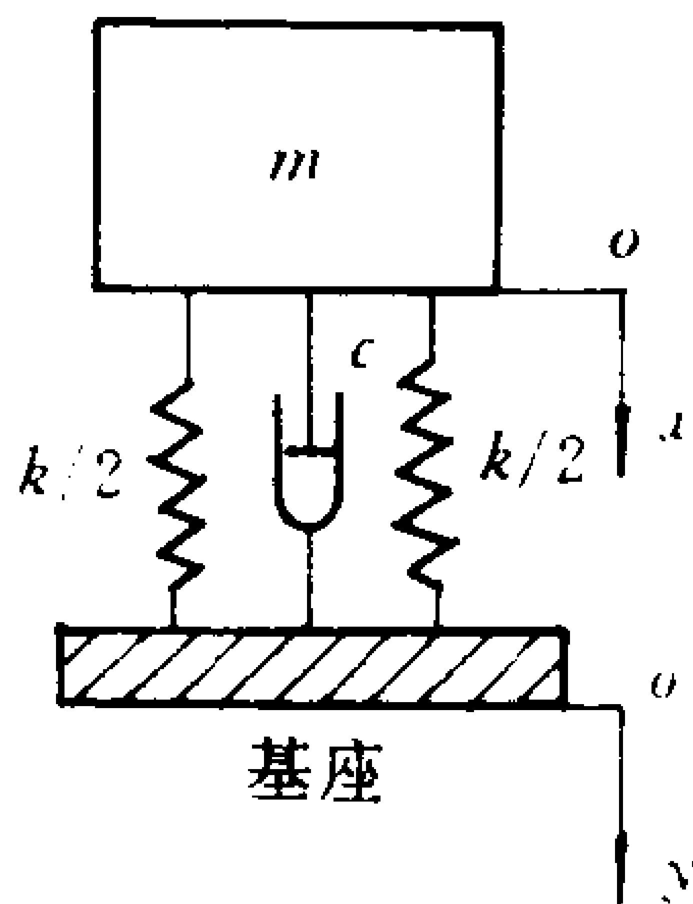



图 3.7.1 基座运动的隔振

假设基础的运动是铅垂方向的谐振动，取 $y$ 轴向下为正，这一运动可表示为

$$y = Y\cos\omega t \qquad (3.7.1)$$

再设质量 $m$ 也只能沿铅垂方向运动，我们以基础不动时($y=0$)，质量 $m$ 的静平衡位置作为原点，沿铅垂方向取 $x$ 轴(向下为正)，用坐标 $x$ 来表示质量 $m$ 的绝对位移。考虑到初变形时的弹簧力与重力正好平衡，所以在运动中作用于质量 $m$ 的净力就只有弹性恢复力与阻尼力，它们在 $x$ 轴上的投影分别为 $-k(x-y)$ 与 $-c(\dot{x}-\dot{y})$。于是，由牛顿定律，有

$$m\ddot{x} = -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y})$$

或写成

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} \qquad (3.7.2)$$

利用复数解法，将 $y$ 与 $x$ 分别表示为

$$\left.\begin{aligned} y &= Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \\ x &= X\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\psi)} = X\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \end{aligned}\right\} \qquad (3.7.3)$$

将它们代入方程(3.7.2)，得

$$(-m\omega^2 + \mathrm{j}c\omega + k)X\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi} = (k + \mathrm{j}c\omega)Y$$

或写成

$$\frac{X}{Y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi} = \frac{k + \mathrm{j}c\omega}{(k - m\omega^2) + \mathrm{j}c\omega} \qquad (3.7.4)$$

对上式两端取绝对值，可得

$$\frac{X}{Y}=\sqrt{\frac{k^2+c^2\omega^2}{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}} \tag{3.7.5}$$

或用阻尼率 $\zeta$ 与频率比 $\gamma$ 表示为

$$\frac{X}{Y}=\sqrt{\frac{1+(2\zeta\gamma)^2}{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}} \tag{3.7.5a}$$

$\frac{X}{Y}$ 称为**传递率**，记为 $T$。传递率愈小意味着隔振效果愈好。

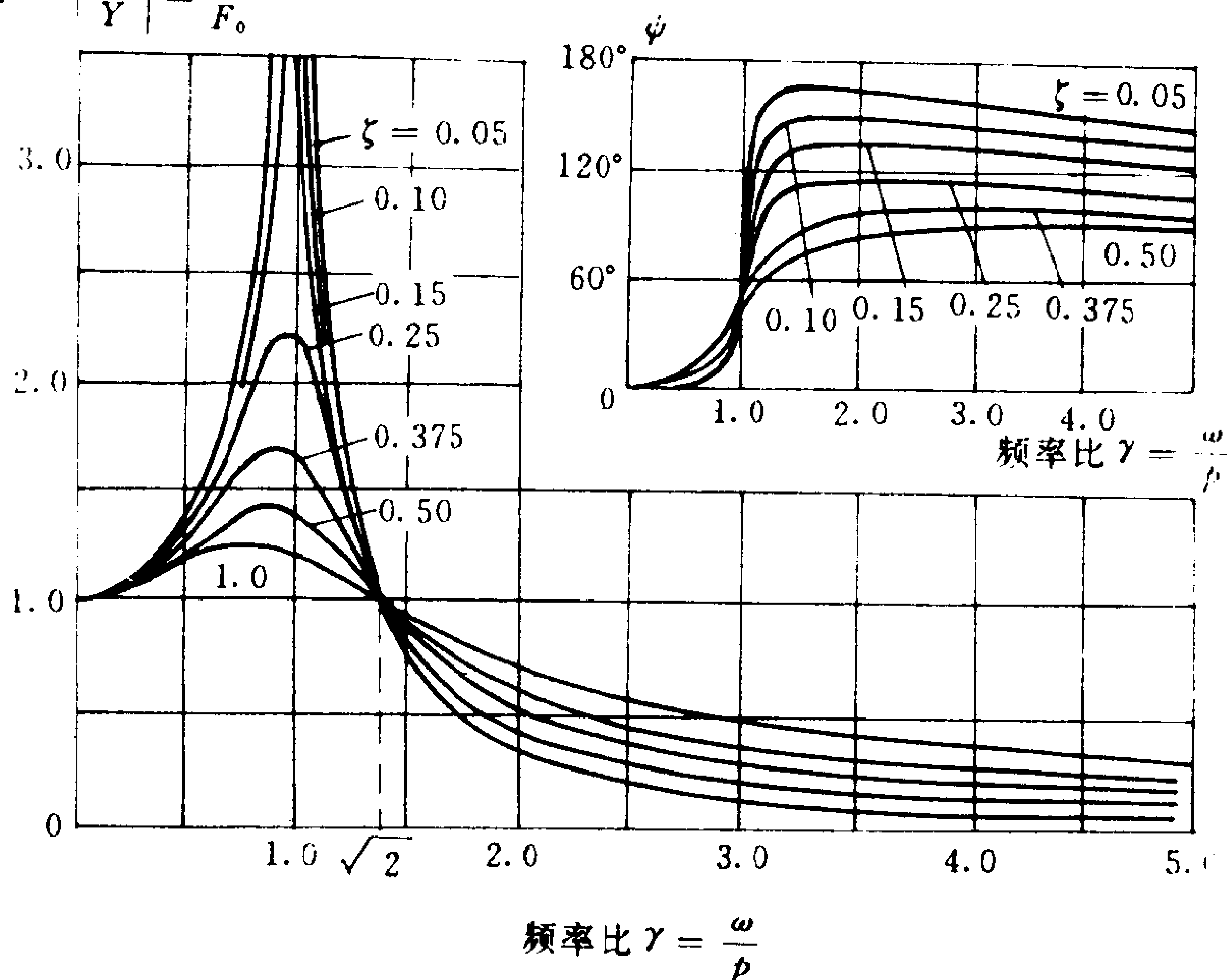



图 3.7.2 $T-\gamma$ 曲线

在图 3.7.2 中，以阻尼率 $\zeta$ 为参数，按式(3.7.5a)画出了传递率随频率比变化的曲线，即 $T-\gamma$ 曲线。从图上可以看到，当 $\gamma=$

$\sqrt{2}$ 时，不论 $\zeta$ 多大，$T$ 都等于1，即所有曲线都交于($\sqrt{2}$，1)点。当 $\gamma > \sqrt{2}$ 时，恒有 $T < 1$。且当 $\gamma \to \infty$ 时，$T \to 0$，这时基础的振动将传递不到仪器仪表上去。值得注意的是，当 $\gamma > \sqrt{2}$ 时，减小阻尼对降低传递率是有利的。但是，为了使结构安全通过共振区，还应考虑保持适当的阻尼。

### 3.7.2　力隔振

这时机器本身是振源，加隔振装置的目的是减小机器的振动对基础的作用。取图3.7.3所示模型系统，基础假定是不动的，在质量 $m$ 上作用有铅垂简谐力 $F = F_0\cos\omega t$。由3.3节可知，这时质量 $m$ 的定常强迫振动为

$$x = X\cos(\omega t - \psi)$$

其中

$$X = X_0\beta = \frac{F_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}}$$

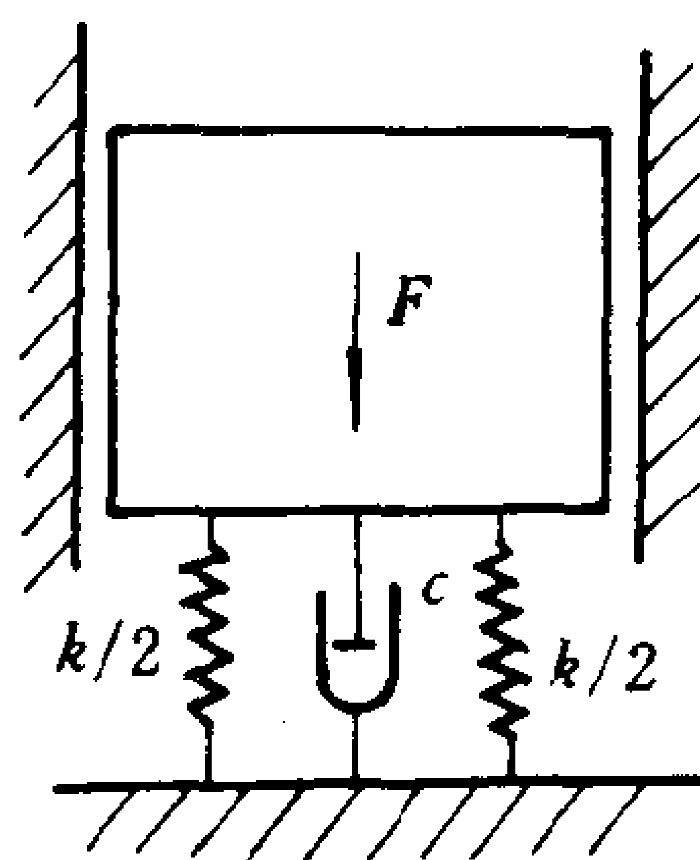



图3.7.3　传递力隔振

故有

$$F_0 = kX\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2} \tag{3.7.6}$$

传到基础上去的力有两个，一个是弹簧力

$$F_k = kx = kX\cos(\omega t - \psi)$$

另一个是阻尼力

$$F_c = c\dot{x} = -c\omega X\sin(\omega t - \psi)$$

这两个力都是同频率的谐和力，但彼此有90°的相位差。所以传到基础上的力是二者的合力，其力幅 $F_T$ 为

$$F_T = X\sqrt{k^2 + c^2\omega^2} = kX\sqrt{1 + (2\zeta\gamma)^2} \tag{3.7.7}$$

传到基础上的力与作用于机器的力，二者力幅之比 $\frac{F_T}{F_0}$ 亦称**传递率**。由式(3.7.6)与式(3.7.7)，可得

$$\frac{F_T}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\gamma)^2}{(1-\gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}} \tag{3.7.8}$$

比较式(3.7.5a)与式(3.7.8),可见有

$$\frac{X}{Y} = \frac{F_T}{F_0} = T$$

这说明无论是力隔振还是运动隔振,两者的原理是统一的。

### 3.7.3 反馈控制隔振

在上述关于图3.7.1所示系统的隔振分析中可以看到,线性阻尼在$\gamma < \sqrt{2}$与$\gamma > \sqrt{2}$这两个频段上所起的作用有所不同,见图3.7.2。当$\gamma < \sqrt{2}$时,增大阻尼有利于降低传递率,而当$\gamma > \sqrt{2}$时,则相反,即增大阻尼反而不利于降低传递率。这一结果是由阻尼器的安装方式引起的。

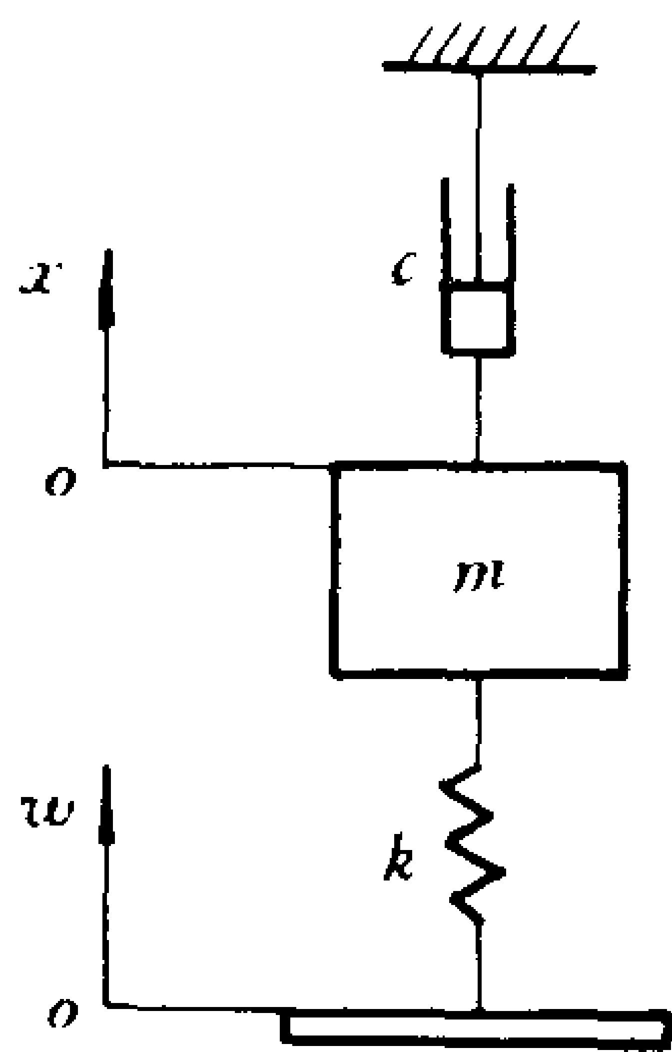



图3.7.4 阻尼器悬空安装结构

若将阻尼器安装成**悬空式**(sky hook)的,如图3.7.4所示,结果就不一样。这时,设基座的运动为$w = \cos\omega t$,则系统的运动微分方程又重新取式(3.3.1a)的形式,即有

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = k\cos\omega t$$

这时,系统的幅频响应曲线将如图3.3.2所示,即系统的放大率曲线与传递率曲线合而为一。在这种情况下,不论$\gamma$取何值,增大阻尼总有利于降低传递率。

然而,有些工程系统,例如车辆、地面建筑等,都无法安装这种悬空式阻尼器。不过利用反馈控制可以达到同样的效果。

考察图3.7.5所示1自由度反馈控制隔振系统。该图中,1代表作动机构,它根据控制信号产生相应的力;2表示加速度传感

器;3 代表控制器,由传感器送来的加速度信号及经积分后得到的速度信号,在这里分别适当“放大”后组成负反馈控制信号;反馈控制力 $F$ 设计为

$$F = -(k_1\dot{x} + k_2\ddot{x}), \quad k_1, k_2 > 0 \tag{3.7.9}$$

这时,系统的运动微分方程可描述为

$$m\ddot{x} = -k(x - w) + F \tag{3.7.10}$$

由式(3.7.9)与式(3.7.10),可得系统的传递函数为

$$\frac{X(s)}{W(s)} = \frac{k}{(m + k_2)s^2 + k_1 s + k} \tag{3.7.11}$$

不难看到,上述反馈控制隔振系统有以下特点:

(1) 它能提供大小与隔振对象绝对速度成正比的阻尼力,即实现悬空式阻尼器的功能。

(2) 在隔振弹簧静变形 $\delta(\delta = mg/k)$ 保持不变的情形下,能增大系统的等效质量 $(m + k_2)$。换句话说,能在不改变系统原有质量与刚度的情形下,使系统的固有频率有所下降。

以上两点都有利于提高隔振效果。前者可使增大阻尼在整个频域上都有利于降低传递率;后者使有效隔振 $(T < 1)$ 频带向低频段扩展。

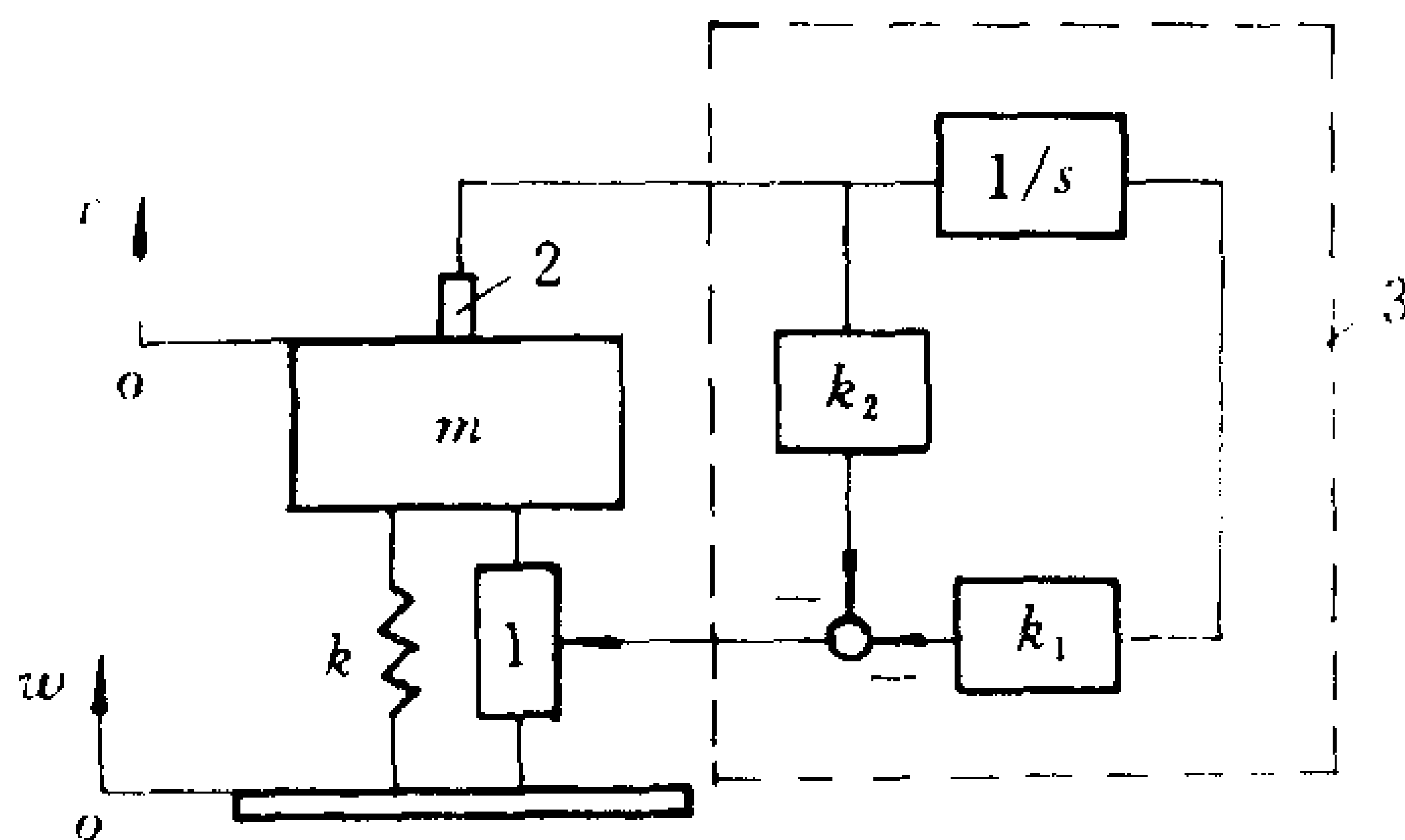



图 3.7.5 反馈控制隔振系统

图 3.7.6 示意地给出了有无反馈控制情形下的隔振效果对比。

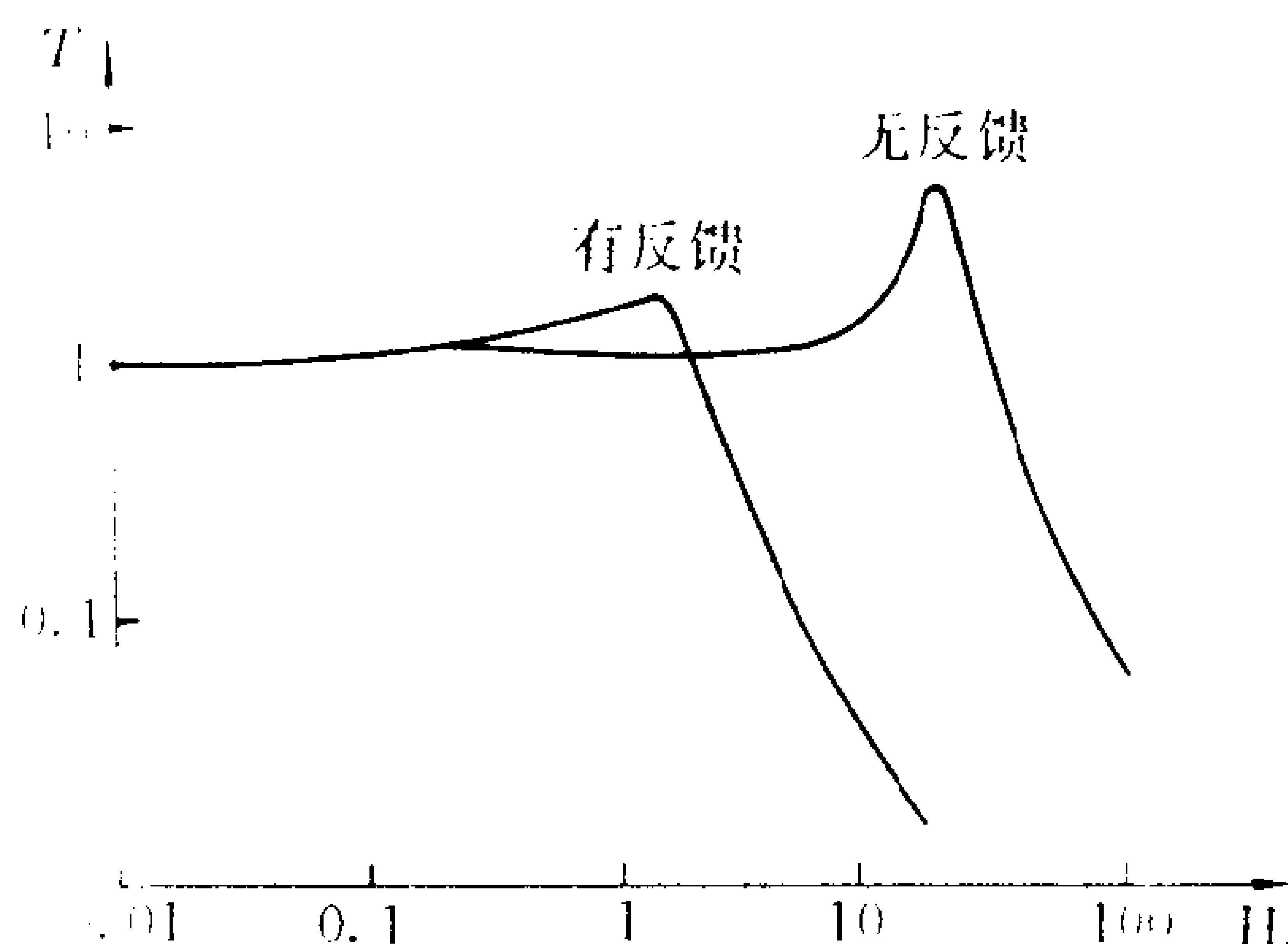



图 3.7.6 隔振效果对比

# 3.8 结构阻尼

当材料处于交变应力状态时,由于内部的能量耗散而呈现出阻尼特性。实验指出,对于像钢与铝合金等结构材料,在振动一周内所耗散的能量与频率无关,而大致与应变幅值的平方成正比。因为应变幅度往往取决于振幅,所以又可以看成耗能与振幅的平方成正比。这种阻尼常称为结构阻尼。假设在振动中,结构阻尼每周耗散的能量为

$$\Delta E = \alpha X^2 \tag{3.8.1}$$

其中 $X$ 是振幅,$\alpha$ 是由实验测定的常数。实验指出,对于金属材料,$\alpha$ 大致取值于 $2 \sim 3$ 之间。

3.3 节中曾经指出,线性阻尼在振动一周内所耗散的能量为

$$\Delta E = \pi c \omega X^2 \tag{3.8.2}$$

现在引入等效线性阻尼的概念，即假设结构阻尼与等效线性阻尼在振动一周内所耗散的能量相等，即有

$$\alpha X^2 = \pi c_e \omega X^2$$

由此可确定结构阻尼的等效线性阻尼系数 $c_e$ 为

$$c_e = \frac{\alpha}{\pi\omega} \tag{3.8.3}$$

将上述等效线性阻尼系数 $c_e$ 代入线性阻尼系统强迫振动微分方程，可得

$$m\ddot{x} + \left(\frac{\alpha}{\pi\omega}\right)\dot{x} + kx = F(t) \tag{3.8.4}$$

$F(t)$ 为作用于系统的扰力。

我们用复数解法来考察这一情形的定常强迫振动。设系统作用有复谐和扰力

$$F(t) = F_0 e^{j\omega t}$$

这时，系统的定常强迫振动可设为

$$x = X e^{j\omega t}$$

其中 $X$ 为复振幅。对于上述定常振动，有

$$\dot{x} = j\omega X e^{j\omega t} = j\omega x$$

将它们代入系统的运动微分方程(3.8.4)，可得

$$m\ddot{x} + k(1 + j\eta)x = F_0 e^{j\omega t} \tag{3.8.5}$$

其中

$$\eta = \frac{\alpha}{\pi k} \tag{3.8.6}$$

$\eta$ 称为结构阻尼率。而量 $k(1 + j\eta)$ 称为复刚度。

方程(3.8.5)的定常解复振幅可求得为

$$X = \frac{X_0}{1 - \gamma^2 + j\eta} \tag{3.8.7}$$

其中 $X_0 = \dfrac{F_0}{k}$。由上式可见，系统的放大率 $\beta$ 为

$$\beta \equiv \left| \frac{X}{X_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+\eta^2}} \tag{3.8.8}$$

可以看到，系统共振发生在 $\gamma = 1$，即 $\omega = p$ 的情形。这时，共振放大率 $\beta_r$ 为

$$\beta_r = \frac{1}{\eta}$$

与线性阻尼情形的共振放大率 $\beta_r = \frac{1}{2\zeta}$ 相比较，可以认为，在共振情形下结构阻尼率 $\eta$ 相当于线性阻尼率 $\zeta$ 的 2 倍。

应该再次强调，上述结构阻尼与线性阻尼之间的类比关系，只适用于谐和激励下的定常强迫振动。

## 3.9　品质数与半功率带宽

当系统阻尼甚小时，从放大率的 $\beta-\gamma$ 曲线可以看到，在共振区（即 $\gamma = 1$ 附近）形成共振峰，如图 3.9.1 所示。阻尼率愈小，共振峰愈尖，所以工程上常把阻尼甚小的系统称为具有尖峰幅频特性的系统。系统在 $\gamma = 1$ 时的放大率，常称为系统的**品质数** $Q$，即有

$$Q \equiv \frac{1}{2\zeta}$$

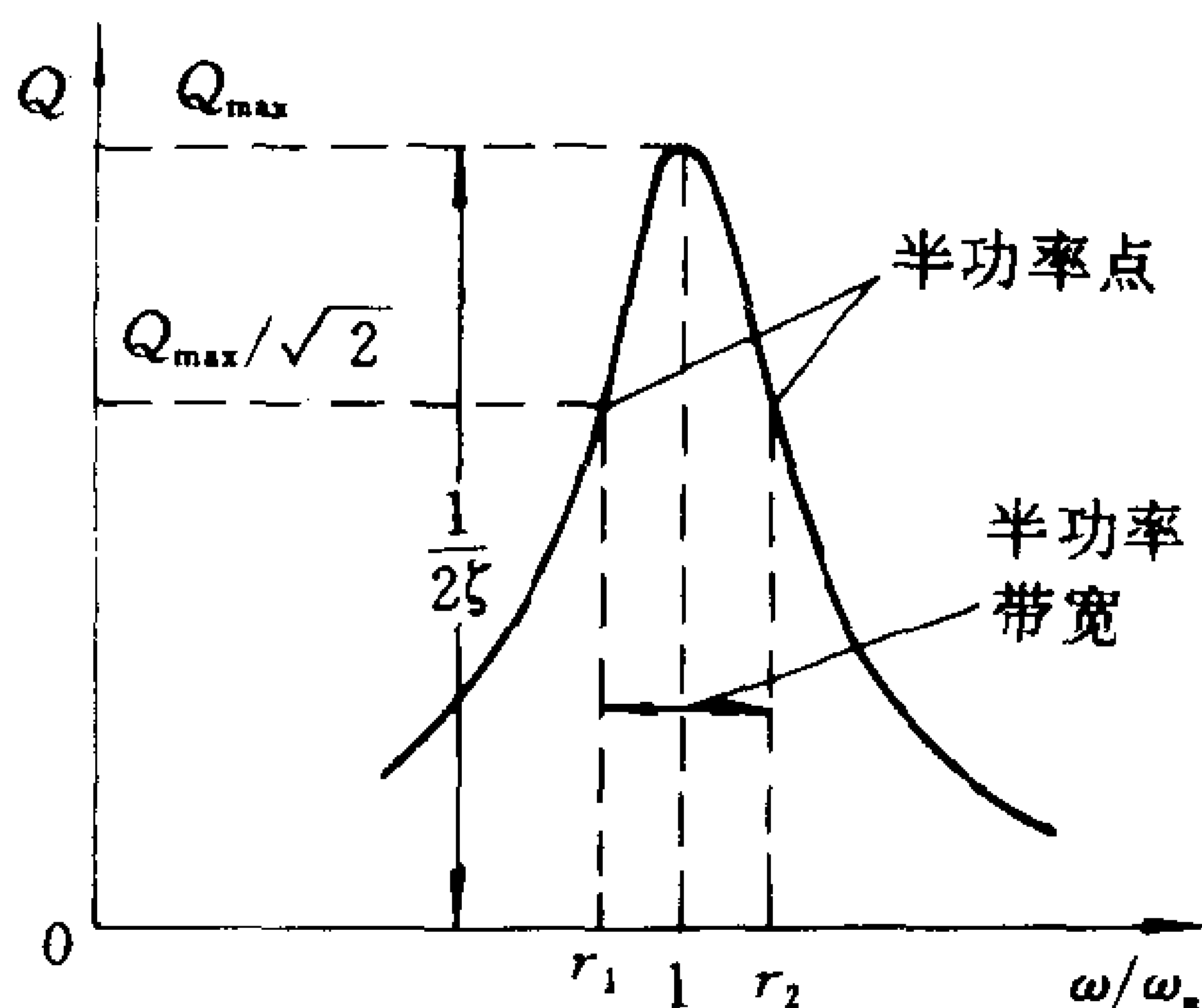



图 3.9.1　半功率带宽

品质数 $Q$ 可用来表征系统共振峰的锐度，$Q$ 愈大，共振峰愈尖。它也反映了系统的窄带滤波性能，振荡电路中称之为选择性，$Q$ 值愈大，选择性愈好。

与 $Q$ 数相对应，半功率带宽 $\Delta$ 常用来表征共振峰宽度，它反映系统共振区的大

小。在放大率的 $\beta-\gamma$ 曲线上，$\beta$ 值等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}Q$（即 $0.707Q$）的点常称为**半功率点**[①]。两个半功率点之间的频带宽度定义为共振峰的**半功率带宽**。

设半功率点所对应的频率比为 $\gamma_i(i=1,2)$，按定义有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\zeta}\right)^2=\frac{1}{(1-\gamma_i^2)^2+(2\zeta\gamma_i)^2}$$

即有

$$\gamma_i^4-2(1-\zeta^2)\gamma_i^2+(1-8\zeta^2)=0$$

由此可解得

$$\gamma_{1,2}^2=(1-2\zeta^2)\mp 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}$$

考虑到阻尼甚小时，有 $\zeta\ll 1$，略去 $\zeta^2$ 以上的小量，可得

$$\gamma_{1,2}^2=1\mp 2\zeta$$

在同样的精确度内，有

$$\gamma_{1,2}=1\mp\zeta$$

按半功率带宽的定义，有

$$\Delta\equiv\gamma_2-\gamma_1$$

故有

$$\Delta=2\zeta=\frac{1}{Q}$$

这就是说，当阻尼甚小时，系统的品质数与半功率带宽互为倒数。

在结构阻尼的情形，有

$$Q=\frac{1}{\eta}$$

故有

$$\Delta=\eta$$

① 因为功率常正比于振幅的平方，在这点处，功率刚好是最大功率的 1/2，故有半功率点的名称。

# 第四章　1自由度线性系统(三)
# ——非定常响应

## 4.1 引　　言

上一章阐述了系统对定常激励的响应,这些激励或者是时间的谐和函数,或者是可以展开为傅里叶级数的周期函数。在定常激励作用下,由于阻尼的影响,系统响应中的自由振动部分迅速衰减;剩下的强迫振动部分构成系统的定常响应。因此,需要考虑的主要是定常响应。

在另外一些重要的情形下,激励本身是非定常的,因而系统根本就没有定常响应。非定常激励大致可分成两类:第一类是变化任意的持久作用;第二类是突发性的冲击作用。本章分别考察系统对应于这两类激励的非定常响应。

对于第一类,主要是建立线性阻尼系统非定常响应的卷积积分表示式。上一章在考察系统的定常响应时,主要采用频率响应特性的概念,用它来表述系统的动态响应特性,并分析系统的定常响应,这一方法通常称为频率响应法。它的基础是前面提到的叠加原理。所谓脉冲响应是指系统对单位冲量产生的响应,它是依赖于冲量作用时刻与所考察响应时刻的时间函数。按照叠加原理,对于一个时间历程为任意函数的激励,可以把它分割成一系列在各个不同时刻作用的微冲量。这样,系统对应于一个任意激励的响应就等

于系统对应于上述微冲量系列激励的响应之和。结果导致非定常响应的卷积积分表示，也称杜汉梅耳积分。

频率响应法与脉冲响应法是分析线性系统动态响应的两把利刃，它们分别从频域与时域这两个不同的侧面来剖析线性系统的动态行为。傅里叶变换是沟通频域分析与时域分析的桥梁。事实上，系统频率响应特性正是系统脉冲响应的傅里叶变换。

定常响应的傅里叶级数展式在频域内对应于离散频谱，而非定常响应的卷积分表示式在频域内对应于连续频谱。这是非定常运动有别于定常运动的一个特点。

本章还介绍如何用拉普拉斯变换法来求解系统的非定常响应。拉普拉斯变换法是研究常参数线性系统的一个有力工具，特别便于研究激励为时间的分段连续函数的情形。由拉普拉斯变换法得到的解，可同时包括对激励的响应与对初始条件的响应。

对于第二类问题，人们关注的是系统在非定常响应中达到的最大值。由于系统在冲击作用下往往很快就达到最大值，这时，阻尼还来不及耗散大量机械能；因此，对这类问题通常只考察不计阻尼时的系统响应。本章末尾将对工程设计中常用做参考的冲击响应谱作简要的介绍。

## 4.2 脉冲响应法与时域分析

系统非定常响应分析中需要用到一个重要的概念——**脉冲响应函数**。它定义为系统在单位冲量作用下的瞬态响应。

单位冲量可以用 $\delta$ 函数来表示。$\delta$ 函数是一种广义函数，数学上常定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \varphi(0) \qquad (4.2.1)$$

其中 $\varphi(t)$ 是在原点连续的任意函数，$0_-$ 代表 $t$ 轴上从左边趋于零

的点，$0_+$ 代表 $t$ 轴上从右边趋于零的点。在式(4.2.1)中，令 $\varphi(t)=1$，即有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \qquad (4.2.2)$$

设 $t$ 代表时间，则 $\delta(t)$ 有 $\mathrm{T}^{-1}$ 的量纲。这时，力冲量可表示为

$$f(t)=I\delta(t) \qquad (4.2.3)$$

其中 $I$ 为常量，具有 $\mathrm{LMT}^{-1}$ 的量纲。令式(4.2.3)中 $I=1$，得单位力冲量。

假设所考察系统的静平衡状态是渐近稳定的，即原来处于静平衡状态的系统，在受到一个冲击后，进入运动状态，但随着时间的推移，又会渐近地恢复到静平衡状态。原来处于静止状态的系统，对应于在 $t=0$ 时作用的单位力冲量所产生的瞬态响应 $h(t)$，称为**脉冲响应函数**。由于我们已假设系统在冲量作用之前是静止的，所以当 $t<0$ 时，有 $h(t)=0$。

**例 4.2.1**　试求 1 自由度线性系统在亚临界阻尼情形下的脉冲响应函数。

**解**　这时，系统的运动微分方程可表示为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\delta(t) \qquad (a)$$

初始条件设为

$$x(0_-)=\dot{x}(0_-)=0$$

对式$(a)$两端乘以 $\mathrm{d}t$，并从 $0_-$ 到 $0_+$ 进行积分，可得

$$\int_{0_-}^{0_+}(m\ddot{x}+c\dot{x}+kx)\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \qquad (b)$$

考虑到在趋于零的时间间隔内，系统的位移 $x$ 还来不及发生变化，故上式左端各项的积分分别为

$$\int_{0_-}^{0_+}m\ddot{x}\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}m\mathrm{d}\dot{x}=m\dot{x}\Big|_{0_-}^{0_+}=m\dot{x}(0_+)$$

$$\int_{0_-}^{0_+}c\dot{x}\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}c\mathrm{d}x=cx\Big|_{0_-}^{0_+}=0$$

$$\int_{0_-}^{0_+} kx\mathrm{d}t = 0$$

将以上结果代入式($b$),可得

$$\dot{x}(0_+) = \frac{1}{m}$$

这就是说,原系统在 $t=0$ 时作用一单位冲量,其效果等价于产生了一个初速度 $\dot{x}(0_+) = \dfrac{1}{m}$。往后,系统就进行自由衰减振动。在亚临界阻尼情形,有

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} < 1$$

再记

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad q = p\sqrt{1-\zeta^2}$$

上述系统的脉冲响应函数可表示为

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{mq}\mathrm{e}^{-\zeta pt}\sin qt, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{4.2.4}$$

在本例中,$h(t)$ 的量纲等于 $\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}$。

下面来看如何从脉冲响应函数导出系统对应于任意力 $f(t)$ 的非定常响应。按定义,$h(t)$ 是系统在零初始条件下,对应于 $t=0$ 时作用的单位冲量所产生的响应。不难看到,如果在 $t=\tau$ 作用一单位冲量,那末系统的响应将是

$$x(t) = h(t-\tau)$$

这样,我们可以把任意力 $f(t)$ 看做一系列冲量微元 $f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 之和,如图 4.2.1 所示。其中 $f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 相当于在 $t=\tau$ 时作用的一个冲量微元,而系统对应于它的响应微元则为

$$\mathrm{d}x = h(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

按叠加原理,系统对应于 $f(t)$ 的总响应则为

$$x(t)=\int_0^t h(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.2.5}$$

这一形式的积分称为**卷积积分**。

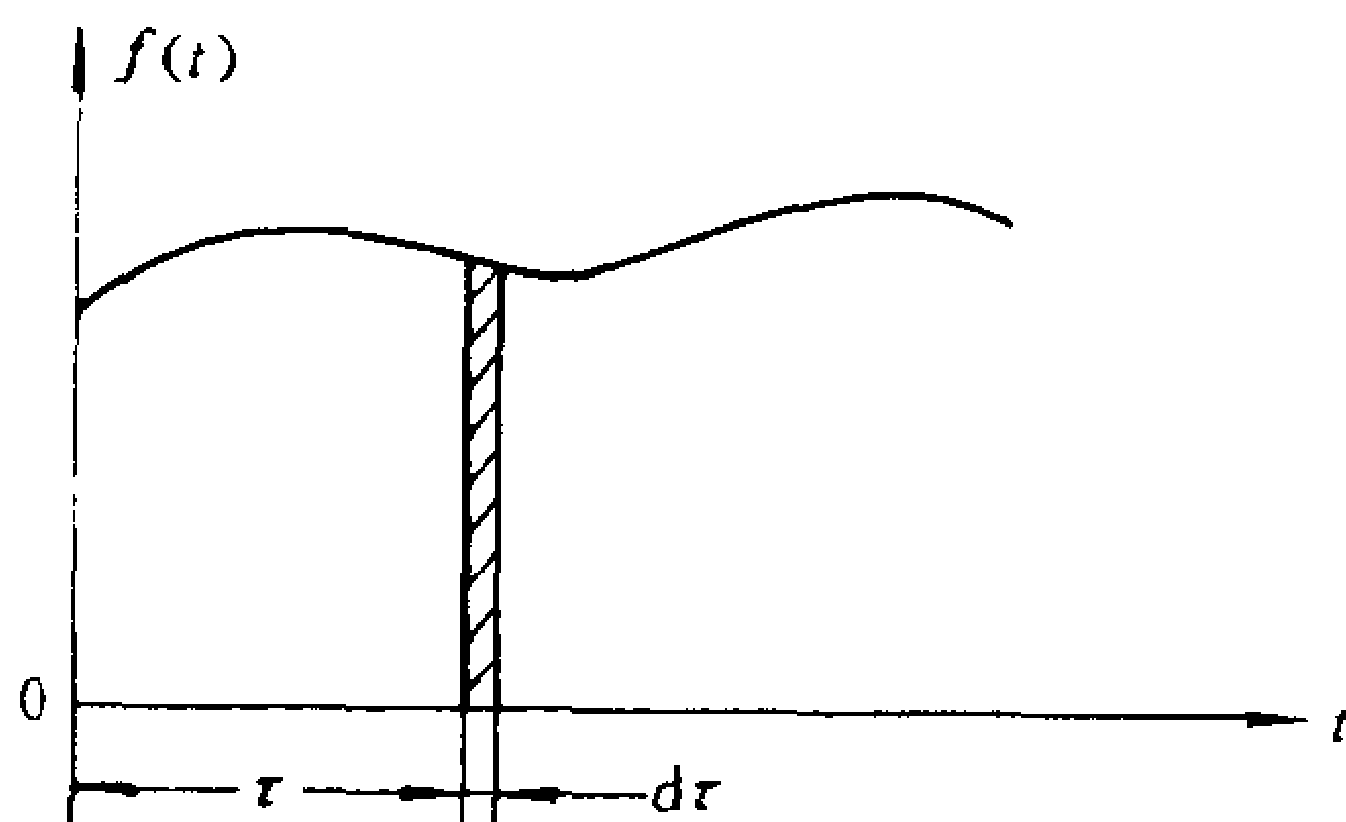



图 4.2.1　任意力的分解

**例 4.2.2**　试求例 4.2.1 中的系统在零初始条件下对应于任意扰力 $f(t)$ 的响应。

**解**　例 4.2.1 中已求得该系统的脉冲响应函数 $h(t)$ 为

$$h(t)=\left(\frac{1}{mq}\right)\mathrm{e}^{-\zeta pt}\sin qt,\quad t>0$$

将它代入式(4.2.5),可得

$$x(t)=\frac{1}{mq}\int_0^t f(\tau)\mathrm{e}^{-\zeta p(t-\tau)}\sin q(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.2.6}$$

这一积分常称为杜汉梅耳积分。它代表1自由度线性阻尼系统在零初始条件下对应于任意扰力 $f(t)$ 的非定常响应。它包括了扰力所引起的自由振动以及强迫振动。我们来看一个特例。在式(4.2.6)中,令 $\zeta=0$, $f(t)=F_0\cos\omega t$。这时有

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{F_0}{mp}\int_0^t\cos\omega\tau\sin p(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{F_0}{2mp}\int_0^t\{\sin[(\omega-p)\tau+pt]-\sin[(\omega+p)\tau-pt]\}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$= \frac{F_0}{2mp}\left\{\frac{\cos[(\omega - p)\tau + pt]}{p-\omega} + \frac{\cos[(\omega + p)\tau - pt]}{p+\omega}\right\}\Bigg|_0^t$$

$$= \frac{F_0}{2mp}(\cos\omega t - \cos pt)\left(\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p+\omega}\right)$$

$$= \frac{F_0}{mp^2}\frac{1}{1-\gamma^2}(\cos\omega t - \cos pt),\quad t > 0$$

与3.2节中的结果相对照，上式等同于式(3.2.11)中的最后两项。

式(4.2.5)所示卷积积分可写成几种不同的等价形式。首先，当推导式(4.2.5)时，实际上考察的扰力是$f(t)u(t)$，其中$u(f)$为单位阶跃函数。也就是说，假设当$t<0$时，有$f(t)=0$。在这个假设下，将式(4.2.5)中积分下限扩展到$-\infty$并不改变原来的积分结果，即可以形式地写成

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.2.7}$$

其次，注意到$h(t-\tau)$是系统对应于在时刻$\tau$作用的单位冲量的响应。当$\tau>t$时，也就是$t-\tau<0$时，该冲量尚未作用，当然就没有响应。所以有

$$h(t-\tau)=0,\qquad t<\tau$$

这样，即使将式(4.2.7)中的积分上限扩展到$\infty$也不会改变积分结果。所以，式(4.2.5)的第二种改形可写为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.2.8}$$

再其次，对式(4.2.7)可进行如下变量代换

$$\theta = t-\tau$$

其中$\theta$可理解为冲量作用时刻至系统响应时刻之间的时间推移。这时，积分下限变为$\theta=\infty$，上限变为$\theta=0$，而$\mathrm{d}\tau=-\mathrm{d}\theta$。代入式(4.2.7)后，可得

$$x(t) = \int_{0}^{\infty} f(t-\theta)h(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{4.2.9}$$

考虑到，$\theta<0$意味着响应在前而冲量作用在后，当然有

$$h(\theta)=0, \qquad \theta<0$$

故式(4.2.9)又可以等价地改写成

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\theta)h(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{4.2.10}$$

这样，我们得到了与式(4.2.5)等价的四种不同形式：式(4.2.7)～(4.2.10)。一个稳定的常参数线性系统在零初始条件下，对应于任意扰力 $f(t)u(t)$ 作用的非定常响应可以由上述五种形式的卷积积分中任意一个来表示。

对于非零初始条件下的非定常响应问题，系统的总响应可以由上述卷积积分再叠加上由初始条件($x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$)所引起的自由振动来表示，即加上

$$\left(x_0\cos qt+\frac{\dot{x}_0+\zeta p x_0}{q}\sin qt\right)\mathrm{e}^{-\zeta pt}$$

**例 4.2.3**　分析加速通过共振区的问题。

**解**　扰力频率随时间变化的情形在实践中也是常有的，例如，旋转机械在启动过程中加速通过共振区的情形。这时，系统的响应属于非定常运动。

现考察1自由度线性系统在变频"谐和"力作用下的响应。假设系统的运动微分方程可表示为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t)=f_0\cos\left(\frac{1}{2}at^2\right)u(t) \tag{a}$$

其中 $f_0$ 为常数力幅，$a$ 为扰力相位的匀角加速度。相应的扰力相位瞬时角速度为

$$\omega=at$$

设系统的初始条件为

$$x(0)=\delta\equiv\frac{f_0}{k}, \quad \dot{x}(0)=0$$

这时，系统的非定常响应可表示为

$$x=\left(\delta\cos qt+\frac{\zeta p\delta}{q}\sin qt\right)e^{-\zeta pt}+\frac{\delta}{q}\int_0^t e^{-\zeta p(t-u)}\sin q(t-u)\cos\left(\frac{1}{2}au^2\right)du \tag{b}$$

其中

$$q=p\sqrt{1-\zeta^2},\qquad p=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

注意，式$(b)$中的积分具有如下形式

$$\begin{aligned}&\int_0^t e^{\zeta pu}\sin(p\sqrt{1-\zeta^2}u)\cos(\frac{1}{2}au^2)du\\&\int_0^t e^{\zeta pu}\cos(p\sqrt{1-\zeta^2}u)\cos(\frac{1}{2}au^2)du\end{aligned} \tag{c}$$

这是一类比较繁复的振荡型积分，得借助于计算机进行数值积分。如今，这在微机上就能实现。而在30年代初，刘易斯①求解这一问题时，困难之大可以想像。但他还是成功地利用近似方法找到了解答。对于不计阻尼的情形，其计算结果如图4.2.2所示。图中给出了$a$取几个不同值时系统非定常响应包络放大率$X/\delta$随扰力瞬时频$at/p$的变化曲线。还给出了对应于$a=0.016p^2$的系统响应时间历程。为了便于对照，图中还给出了对应于$a=0$情形下系统定常响应的放大率曲线。从图4.2.2可以看到如下特点：

(1) 随着扰频加速度$a$的增大，响应包络的最大峰值愈来愈小；

(2) 与之同时，最大峰值的出现时刻离定常情形下的共振时刻$(at=p)$愈来愈晚。

这个定性结论即使在考虑到阻尼影响时仍然是适用的。对于减速通过共振的情形，定性地说，会发生类似于图4.2.2中（相对于$at/p=1$）镜像对称的情形，即这时响应包络放大率曲线的最大

① Lewis F M. Vibration during acceleration through a critical speed, Trans, ASME, 1932, 54:253

峰值将出现在 $at/p<1$ 的时刻，而且随减速愈快，最大峰值愈小。

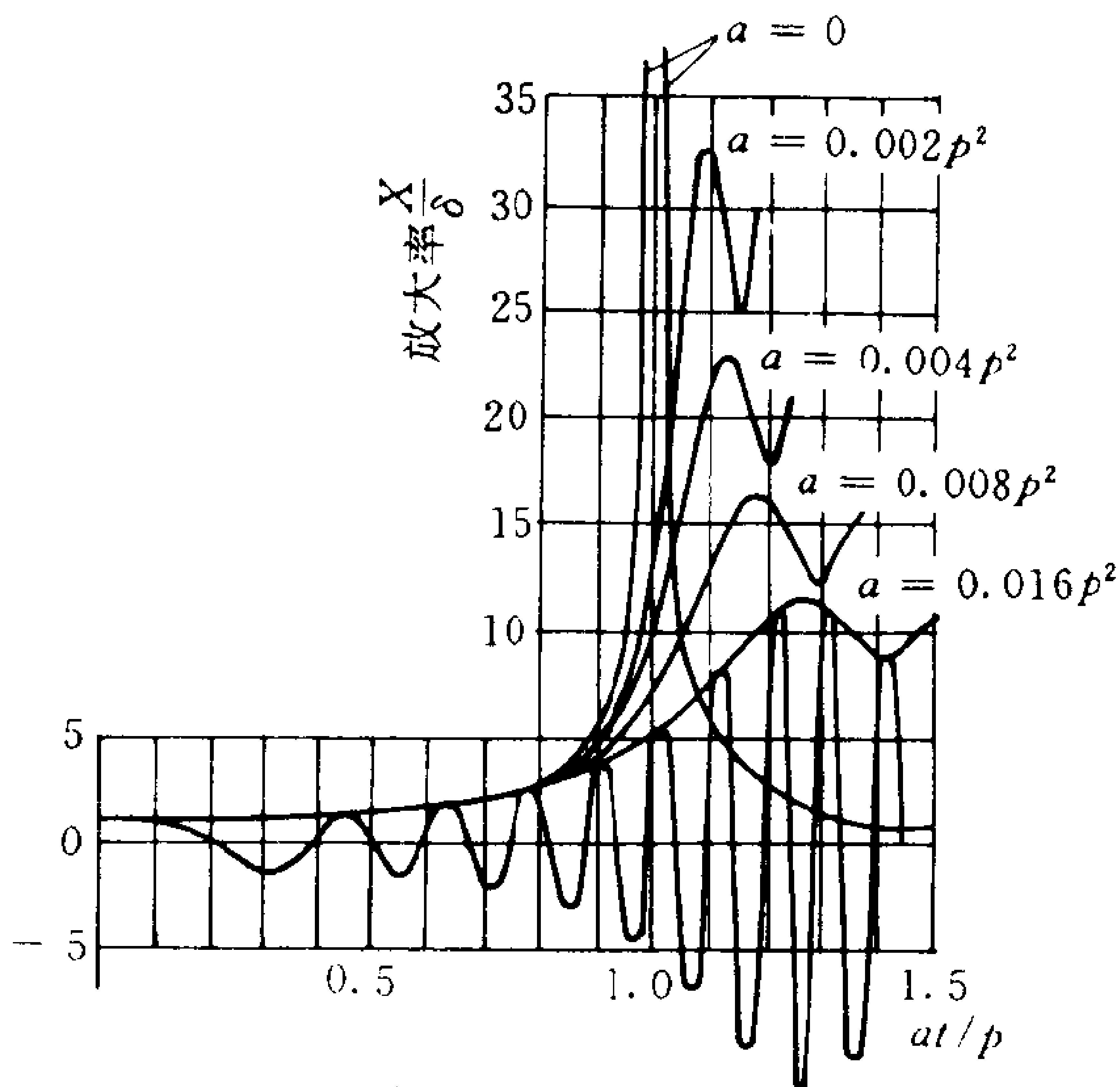



图 4.2.2　加速通过共振情形

## 4.3　傅里叶(积分)变换与频域分析

3.5 节中提及：任何一个满足所谓狄利克雷条件的周期函数都可以展开为傅里叶级数。本节要介绍的是：任何一个满足狄利克雷条件的非周期函数 $f(t)$，若再满足绝对可积条件(充分条件)，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty \tag{4.3.1}$$

则 $f(t)$ 一定可以表示为如下傅里叶积分

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{4.3.2}$$

其中

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{4.3.3}$$

可以把上述定义于整个 $t$ 轴上的非周期函数 $f(t)$，看成是周期为 $T$ 的周期函数当 $T\to\infty$ 时的极限情形，如图4.3.1所示。由此启示我们如何从傅里叶级数演化出傅里叶积分。

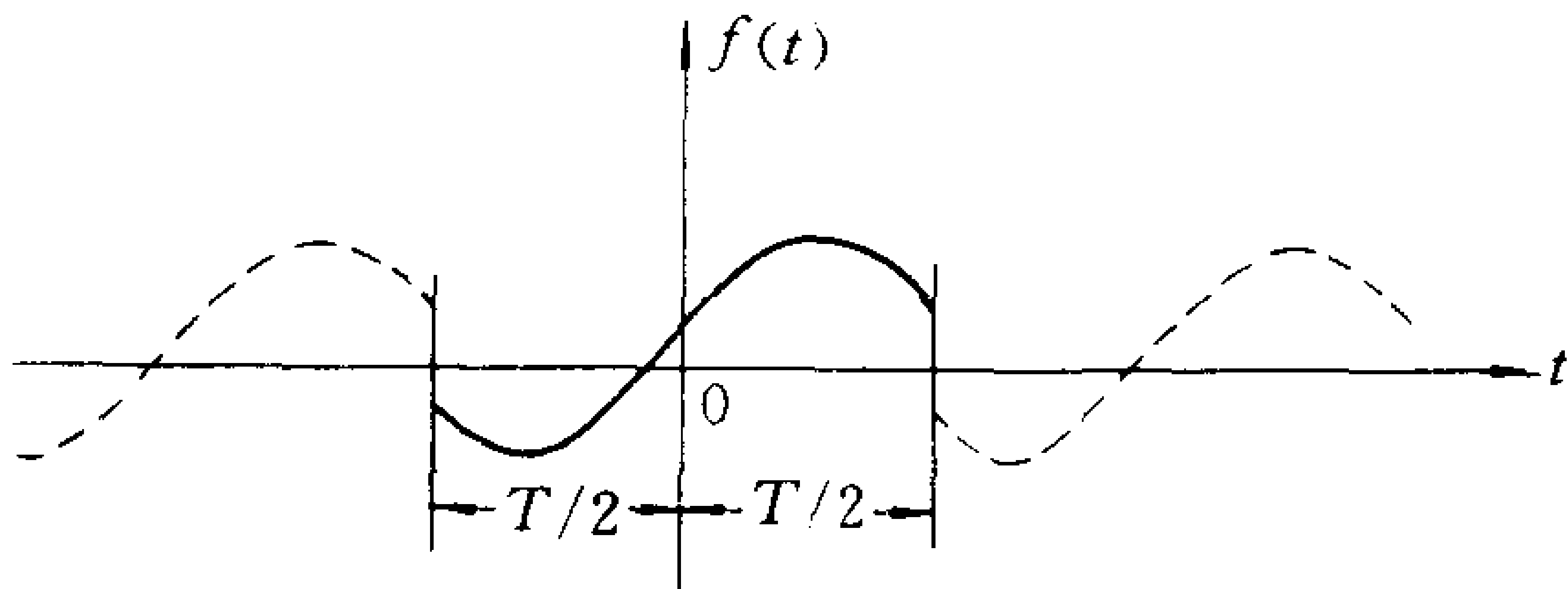



图 4.3.1 $T\to\infty$ 时，向非周期函数过渡

作为周期为 $T$ 的周期函数，$f(t)$ 的复数形式的傅里叶级数可表示为

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t},\qquad \Omega=\frac{2\pi}{T}$$

且有

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t$$

注意，随着 $T$ 不断增大，$\Omega$ 将不断变小，不妨将 $\Omega$ 记为 $\Delta\omega$，而将 $n\Omega$ 记为变量 $\omega$。这时，在上式两端乘以 $T$，再让 $T$ 趋于无限大，于是有

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}Tc_n&=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\equiv F(\omega)\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

且有

$$f(t)=\lim_{T\to\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}(c_nT)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\left(\frac{2\pi}{T}\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (4.3.2)$$

用数学的语言来说，$f(t)$ 是时间域中的原函数，$F(\omega)$ 是它在频率域中的象函数。式(4.3.3)实现从原函数到象函数的变换，可记为 $F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)]$，而式(4.3.2)实现从象函数到原函数的反变换，可记为 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$，因而式(4.3.2)与式(4.3.3)通常称为关于非周期函数 $f(t)$ 的傅里叶变换对。一些常用函数的傅里叶变换对都已经编制成表①，附录A中只列了一个十分简短的傅里叶变换对表。

周期函数的傅里叶级数展式与非周期函数的傅里叶积分表达式质的差异在于：前者所对应的是离散谱，而后者对应的是连续谱。上一节中提到的 $\delta$ 函数在傅里叶变换中具有重要作用，它可以有效地扩展傅里叶变换的适用范围，特别是可以将谐和函数及周期函数的傅里叶变换用 $\delta$ 函数及其系列表示出来。附录A中指出：复谐和函数的傅里叶变换可表示为

$$\mathscr{F}[e^{j\Omega t}] = 2\pi\delta(\omega - \Omega) \qquad (4.3.4)$$

于是，周期函数 $f(t)$ 的傅里叶变换可表示为

$$\mathscr{F}[f(t)] = 2\pi\sum_{-\infty}^{\infty} c_n\delta(\omega - n\Omega) \qquad (4.3.5)$$

这里，周期函数所对应的离散谱性质由 $\delta$ 函数系列来刻画。

**例 4.3.1**　试求 $\delta$ 函数的傅里叶变换。

**解**　按定义，有

$$\mathscr{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$= e^{-j\omega\cdot 0} = 1$$

这说明时域中单位冲量对应于频域中单位幅度均匀分布谱密度。

**例 4.3.2**　试求图 4.3.2($a$) 所示矩形函数的傅里叶变换。

① 祝同江编．工程数学——积分变换．北京：高等教育出版社，1991

**解** 图 4.3.2($a$) 所示矩形函数可表示为

$$f(t)=\begin{cases}A, & |t|<T\\ 0, & |t|>T\end{cases}$$

按定义,有

$$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\int_{-T}^{T}A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=2A\int_{0}^{T}\cos\omega t\mathrm{d}t=2AT\cdot\frac{\sin\omega T}{\omega T}$$

它可表示为如图 4.3.2($b$) 所示。函数$\dfrac{\sin\omega T}{\omega T}$常称为采样函数。由图 4.3.2($b$) 可以看出 $F(\omega)$ 的主要部分落在$0\leqslant|\omega|\leqslant\dfrac{\pi}{T}$的范围内。当脉冲宽度 $T$ 变窄时,这个频率范围就要扩展,即 $F(\omega)$ 曲线将较平缓。

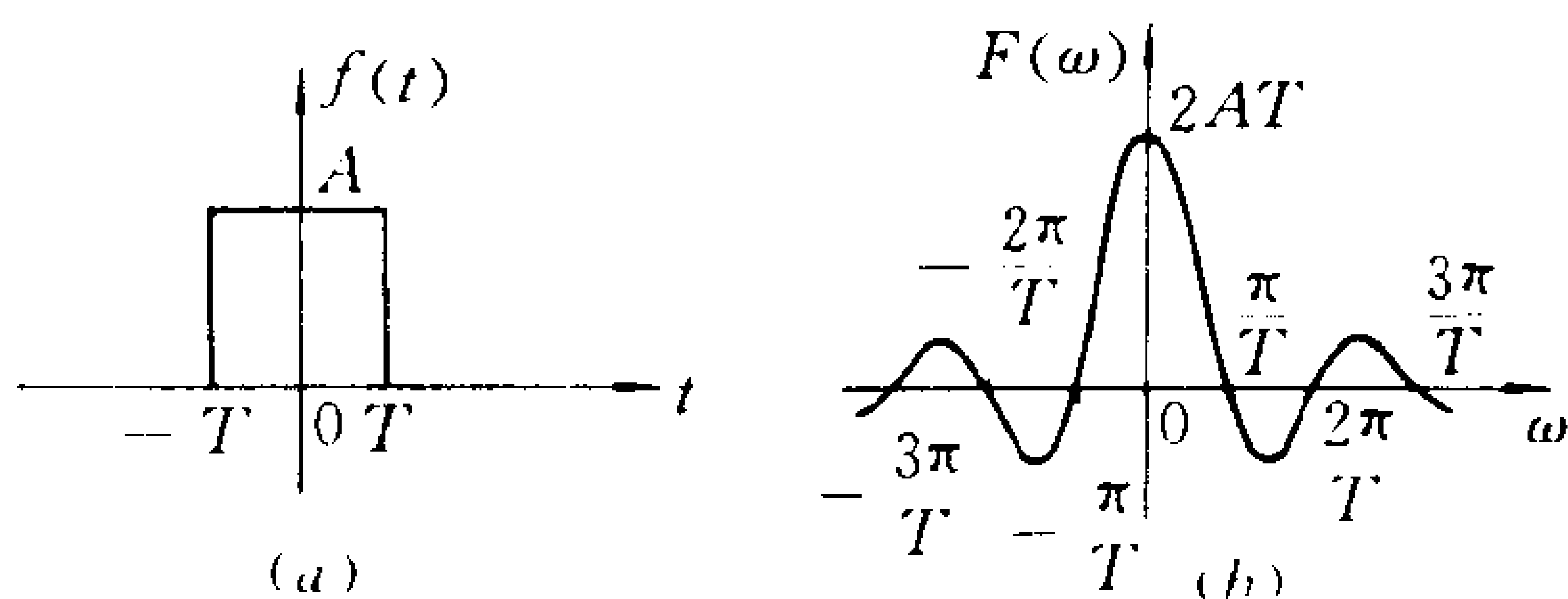



图 4.3.2 矩形脉冲及其傅里叶变换

以上两例的分析结果对于振动试验有重要启示。物理上如能实现瞬时力冲量,当然是最理想的激振手段,这样就可以在整个频率域上对系统进行均匀激发。但实际上这是办不到的。工程上常用的锤击试验模态分析中,锤击只能形成短暂时间内的一个冲击作用,它所对应的频谱虽然比较宽,但为非均匀分布的,通常只能在特定频率范围内保持一定的平坦度。

**例 4.3.3** 试求 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha|t|},\alpha>0$ 的傅里叶变换。

**解**　按定义,有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|}e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{1}{-\alpha - j\omega}e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} + \frac{1}{\alpha - j\omega}e^{(\alpha-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} \\ &= \frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\alpha - j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

在系统动力学的时域分析与频域分析之间,傅里叶变换起着桥梁作用。将时域的分析结果变换成频域的分析结果,需要用到傅里叶变换的一个卷积定理(见附录A)。

**时域卷积定理**:两个时域函数的卷积的傅里叶变换等于各个时域函数的傅里叶变换的乘积。也就是说,假设 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的傅里叶变换分别为 $X(\omega)$ 与 $Y(\omega)$,则有

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right] = X(\omega)Y(\omega) \tag{4.3.6}$$

上节中用脉冲响应法已导出系统在任意激励 $f(t)$ 作用下的非定常响应 $x(t)$ 可表示为式(4.2.8)所示卷积积分

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

式中,$h(t)$ 代表系统的脉冲响应函数,由于所考察的系统已假设为渐近稳定的,这就保证 $h(t)$ 满足绝对可积条件,因而 $h(t)$ 的傅里叶变换存在,记为

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \tag{4.3.7}$$

再设任意激励 $f(t)$ 的傅里叶变换存在,并记为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{4.3.8}$$

利用上述卷积定理,式(4.2.8)所表示的时域分析结果就可以转化为如下频域分析结果

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=H(\omega)F(\omega) \qquad (4.3.9)$$

这一结果以其形式简洁著称，且在试验模态分析与随机振动分析中均有重要作用。

这里，$H(\omega)$ 定义为脉冲响应函数的傅里叶变换，实际上 $H(\omega)$ 也就是3.4节中通过另一种方式定义的系统频率响应特性。

事实上，在定常谐和响应分析中，激励可表示为 $f(t)=F_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}$，其中力幅 $F_0$ 为实常数，$\Omega$ 可以在整个 $\omega$ 轴上流动取值；而响应可表示为 $x(t)=X_\Omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}$，其中 $X_\Omega$ 为复数振幅，它随 $\Omega$ 的取值而定。这时，$x(t)$ 与 $f(t)$ 的傅里叶变换可分别表示为

$$X(\omega)=2\pi X_\Omega\delta(\omega-\Omega)$$

$$F(\omega)=2\pi F_0\delta(\omega-\Omega)$$

将它们代入式(4.3.9)，可得

$$H(\omega)\big|_{\omega=\Omega}=\frac{X_\Omega}{F_0}$$

可见，本节定义的 $H(\omega)$ 与3.4节中定义的频率响应函数是完全一致的。由此可得出结论：系统的频率响应函数与脉冲响应函数互为傅里叶变换对

$$\left.\begin{aligned}H(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\h(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\end{aligned}\right\} \qquad (4.3.10)$$

## 4.4 拉普拉斯变换法

### 4.4.1 方法简介

拉普拉斯变换法广泛采用于线性系统分析，特别是用来研究系统的非定常过程。这一方法的要旨在于：由常系数线性常微分方

程以及相应初始条件所表述的初值问题，通过拉普拉斯变换，可以转化为复数域的代数问题。在得出响应的变换(象函数)的代数表示式后，再通过反变换，即可求出响应的时间函数(原函数)。对于工程上常见的一些典型函数的拉普拉斯变换，都已经编制成表，所以这一方法的求解过程也就公式化了。附录 B 提供了有关拉普拉斯变换的必要基础知识以及一个简短的拉普拉斯变换对表。正文只简单介绍如何用这一方法来研究系统的非定常响应。

设 1 自由度线性系统的运动微分方程可表示为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{4.4.1}$$

相应初始条件可表示为

$$x = x(0), \quad \dot{x} = \dot{x}(0), \quad t = 0 \tag{4.4.2}$$

这就是以微分方程形式表述的初值问题。

对于定义于 $t > 0$ 的时间函数 $x(t)$，它的拉普拉斯变换记为 $X(s)$ 或 $\mathscr{L}x(f)$，并定义为如下定积分

$$X(s) \equiv \mathscr{L}s(t) \equiv \int_0^\infty e^{-st}x(t)\mathrm{d}t \tag{4.4.3a}$$

其中 $s$ 一般为复数，称为辅助变量。函数 $e^{-st}$ 称为变换的核。变换式(4.4.3a)是以 $s$ 为参数而以 $t$ 为积分变量的定积分，所以得到的是 $s$ 的函数。

在求解 $x(t)$ 的微分方程时，不仅要用到 $x(t)$ 的拉普拉斯变换，而且要用到 $x(t)$ 的导数的拉普拉斯变换。利用分部积分，并考虑到初始条件(4.4.2)，不难找到 $\dot{x}(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\dot{x}(t) &= \int_0^\infty e^{-st}\dot{x}(t)\mathrm{d}t \\ &= e^{-st}x(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}x(t)\mathrm{d}t \\ &= sX(s) - x(0)\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

类似地，可得

$$\mathscr{L}\ddot{x}(t) = \int_0^\infty e^{-st}\ddot{x}(t)\mathrm{d}t$$

$$= s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \tag{4.4.5}$$

至于激励 $f(t)$ 的拉普拉斯变换可表示为

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{4.4.6}$$

现在对方程(4.4.1)的两端，都进行上述拉普拉斯变换，可得

$$m\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + c\{sX(s) - x(0)\} + kX(s) = F(s)$$

整理后得

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s) + m\dot{x}(0) + (ms + c)x(0) \tag{4.4.7}$$

引入如下特征多项式

$$D(s) \equiv ms^2 + cs + k = m(s^2 + 2\zeta ps + p^2) \tag{4.4.8}$$

由式(4.4.7)可得系统响应的拉普拉斯变换

$$X(s) = \frac{F(s)}{D(s)} + \frac{m\dot{x}(0) + (ms + c)x(0)}{D(s)} \tag{4.4.9}$$

上式右端第一项与初始条件无关。如系统初始条件为

$$x = \dot{x} = 0, \qquad t = 0$$

则有

$$X(s) = \frac{F(s)}{D(s)} \tag{4.4.10}$$

所以$\frac{F(s)}{D(s)}$为零初始条件下系统响应的拉普拉斯变换。函数$\frac{1}{D(s)}$在控制理论中称为**传递函数**。如果把激励 $f(t)$ 看做系统的输入，把零初始条件下的响应 $x(t)$ 看做系统的输出，那末传递函数的物理意义就是输出的拉普拉斯变换与输入的拉普拉斯变换之比。可以看到，在式(4.4.8)中，令 $s = \mathrm{j}\omega$，那末 $D(\mathrm{j}\omega)$ 就是3.4节中提到的动刚度，而$\frac{1}{D(\mathrm{j}\omega)}$就是相应的动柔度，即系统的位移频率特性 $H_d(\omega)$。

回到一般非零初始条件下的系统响应 $x(t)$，它的拉普拉斯变

换 $X(s)$ 由式(4.4.9)表示。对这一 $X(s)$ 求拉普拉斯反变换，即得响应 $x(t)$，即

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}X(s) \tag{4.4.11}$$

$X(s)$ 的拉普拉斯反变换定义为如下定积分

$$x(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\gamma-\mathrm{j}\infty}^{\gamma+\mathrm{j}\infty}\mathrm{e}^{st}X(s)\mathrm{d}x \tag{4.4.3b}$$

其中 $\gamma$ 为一实数，它大于 $X(s)$ 所有奇点的实部。在具体计算时，可按 $X(s)$ 的特点选取适当的积分路线。在许多情况下，这一积分可以用 $s$ 复平面内的围线积分来代替，利用著名的留数定理可以方便地得出这一积分。从应用的目的来说，只要学会查表就行了。由式(4.4.3$a$)与(4.4.3$b$)定义的拉普拉斯变换与拉普拉斯反变换，常称为拉普拉斯变换对。附录B列出了工程上常用的一些拉普拉斯变换对。为了将 $X(s)$ 化成表中列出的一些函数形式，通常采用部分分式法(见例4.4.5)。下面我们分别来求无阻尼的1自由度线性系统对一些典型激励的响应。

### 4.4.2　系统对典型冲击激励的响应

在不计阻尼的情形下，1自由度线性系统的运动微分方程可表示为

$$m\ddot{x}+kx=F_0f(t)$$

其中 $F_0$ 为激励的最大幅值，$f(t)$ 为最大幅值等于1的时间函数。引入记号

$$p^2\equiv\frac{k}{m},\qquad X_0=\frac{F_0}{k}$$

则上述方程可写为

$$\ddot{x}+p^2x=X_0p^2f(t) \tag{4.4.12}$$

再设初始条件为

$$x=x_0,\quad \dot{x}=\dot{x}_0,\quad t=0 \tag{4.4.13}$$

这时,系统的特征函数为

$$D(s) = s^2 + p^2$$

对应于初始条件(4.4.13),系统响应的拉普拉斯变换为

$$X(s) = \frac{X_0 p^2 F(s)}{s^2 + p^2} + \frac{s x_0 + \dot{x}_0}{s^2 + p^2} \tag{4.4.14}$$

下面分别考察几种典型激励情形下的响应。

**例 4.4.1** 阶跃激励情形。

**解** 阶跃函数定义为(见图 4.4.1)

$$f(t) = 1, \quad t \geqslant 0$$

它的拉普拉斯变换为(见表 B.3 序号 2)

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

图 4.4.1 阶跃激励

由式(4.4.14),得

$$X(s) = \frac{X_0 p^2}{s(s^2 + p^2)} + \frac{s x_0 + \dot{x}_0}{s^2 + p^2}$$

上式的拉普拉斯反变换可写成

$$\mathscr{L}^{-1} X(s) = X_0 p^2 \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + p^2)}\right\} + x_0 \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + p^2}\right\} + \dot{x}_0 \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + p^2}\right\}$$

由表 B.3 序号 11、6、7 可查得

$$x(t) = X_0(1 - \cos pt) + x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt$$

对应于零初始条件,有

$$x(t) = X_0(1 - \cos pt)$$

可见,在阶跃激励下 $x(t)$ 的最大值为 $x_{\max} = 2X_0$。

**例 4.4.2** 斜坡阶跃激励情形。

**解**　斜坡阶跃函数定义为(见图 4.4.2)

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{\tau}, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 1, & t>\tau\end{cases}$$

这一函数也可以看成是两个斜坡函数的叠加,其中一个为从 $t=0$ 开始作用的、斜率为$\dfrac{1}{\tau}$ 的斜坡升函数;另一个为从 $t=\tau$ 开始作用的、斜率为 $-\dfrac{1}{\tau}$ 的斜坡降函数。故 $f(t)$ 又可表示为

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{\tau}, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ \dfrac{t}{\tau}-\dfrac{t-\tau}{\tau}, & t>\tau\end{cases}$$

由表 B.3 序号 3,有

$$\mathscr{L}\left(\frac{t}{\tau}\right)=\frac{1}{\tau}\mathscr{L}(t)=\frac{1}{\tau}\,\frac{1}{s^2}$$

由拉普拉斯变换的时移公式(见表 B.2 序号 2),有

$$\mathscr{L}\left(\frac{t-\tau}{\tau}\right)=\frac{1}{\tau}\,\frac{1}{s^2}e^{-\tau s}$$

故有

$$F(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau}\,\dfrac{1}{s^2}, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ \dfrac{1}{\tau}\left(\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{e^{-\tau s}}{s^2}\right), & t>\tau\end{cases}$$

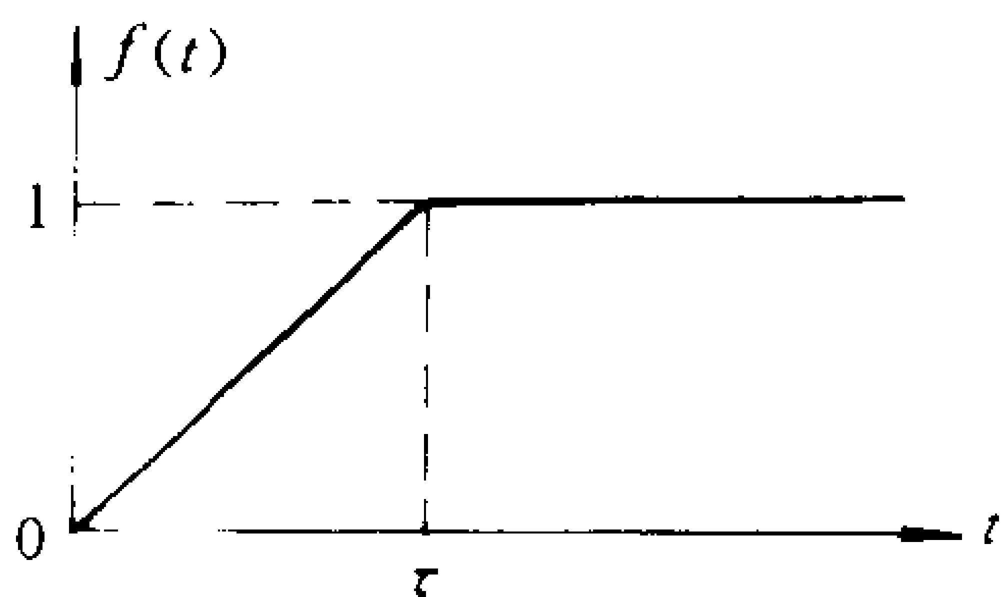



图 4.4.2　斜坡阶跃激励

对应于零初始条件，系统响应为

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{X_0p^2}{\tau}\cdot\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s^2+p^2)}\right\}, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ \dfrac{X_0p^2}{\tau}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s^2+p^2)}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-\tau s}}{s^2(s^2+p^2)}\right]\right\}, & t>\tau\end{cases}$$

由表 B.3 序号 12 及时移公式，有

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{X_0}{p\tau}(pt-\sin pt), & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ \dfrac{X_0}{p\tau}\{(pt-\sin pt)-[p(t-\tau)-\sin p(t-\tau)]\}, & t>\tau\end{cases}$$

化简得

$$x(t)=\begin{cases}X_0\left(\dfrac{t}{\tau}-\dfrac{1}{p\tau}\sin pt\right), & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ X_0\left[1+\dfrac{1}{p\tau}\sin p(t-\tau)-\dfrac{1}{p\tau}\sin pt\right], & t>\tau\end{cases}$$

**例 4.4.3** 矩形脉冲激励情形。

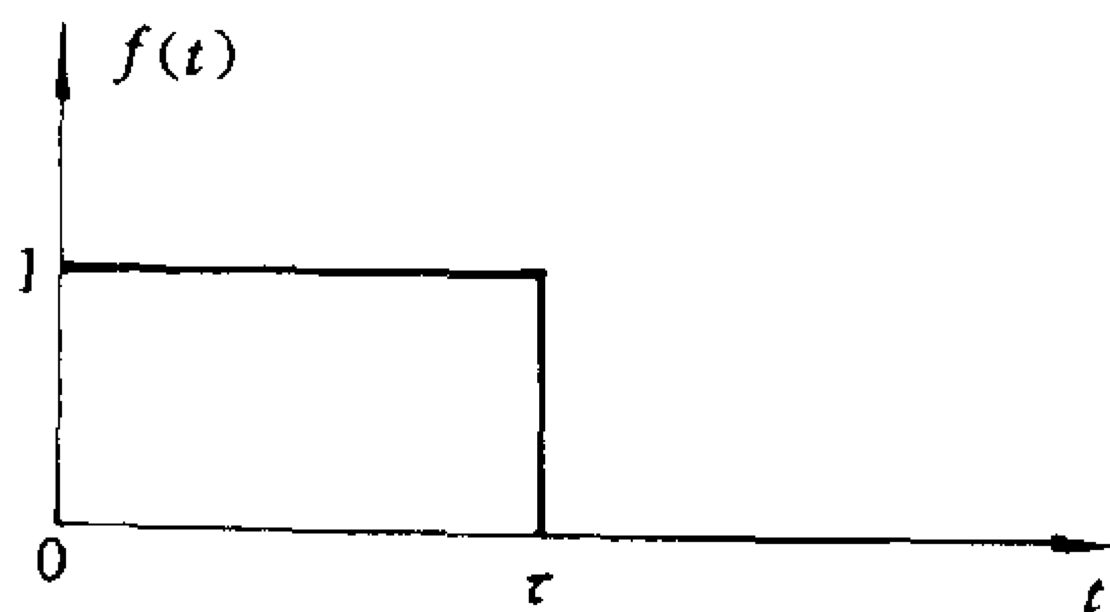



图 4.4.3 矩形脉冲激励

**解** 矩形脉冲函数定义为(见图 4.4.3)

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0, & t>\tau\end{cases}$$

它又可看做 $t=0$ 时作用的阶跃函数与 $t=\tau$ 时作用的阶跃函数二者之差。这样，它的拉普拉斯变换可表示为

$$F(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{s}, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\[2mm] \dfrac{1}{s}-\dfrac{e^{-\tau s}}{s}, & t>\tau\end{cases}$$

对应于零初始条件,系统响应为

$$x(t)=\begin{cases}X_0p^2\cdot\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+p^2)}\right], & 0\leqslant t\leqslant\tau\\[2mm] X_0p^2\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+p^2)}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-\tau s}}{s(s^2+p^2)}\right]\right\}, & t>\tau\end{cases}$$

查表B.3序号11与表B.2序号2,化简后有

$$x(t)=\begin{cases}X_0(1-\cos pt), & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ X_0[\cos p(t-\tau)-\cos pt], & t>\tau\end{cases}$$

**例 4.4.4**　三角形脉冲激励情形。

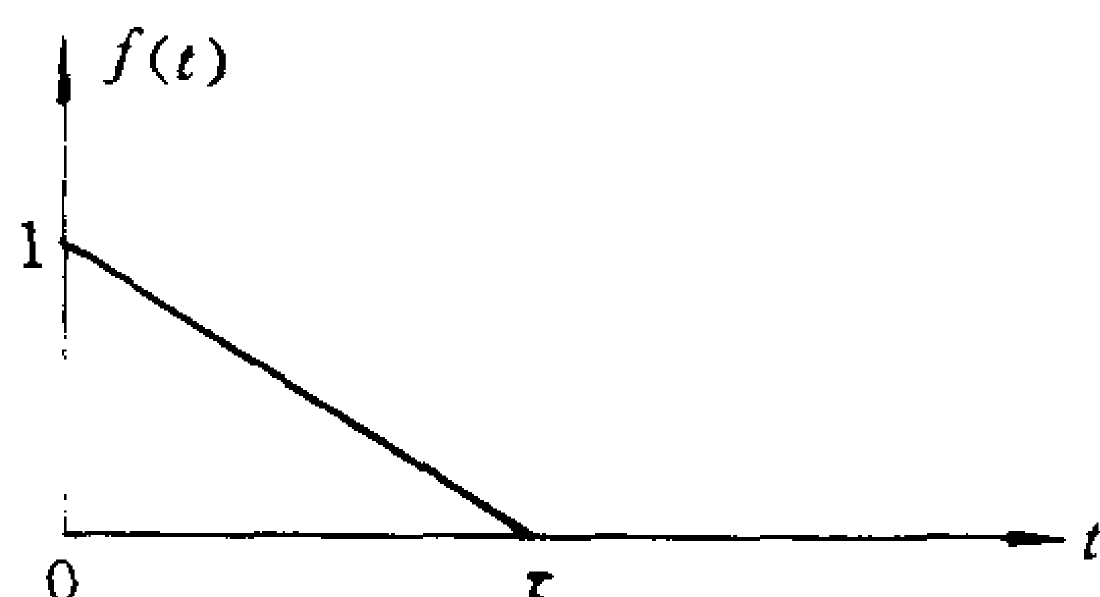



图 4.4.4　三角形脉冲激励

**解**　前沿铅垂的三角形脉冲函数定义为(见图 4.4.4)

$$f(t)=\begin{cases}1-\dfrac{t}{\tau}, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\[2mm] 0, & t>\tau\end{cases}$$

它又可看做阶跃函数与斜坡阶跃函数之差。所以,系统的响应也就是相应响应之差。对应于零初始条件,有

$$x(t)=\begin{cases}X_0\left[1-\cos pt-\dfrac{1}{\tau}\left(t-\dfrac{1}{p}\sin pt\right)\right], & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ X_0\left[\dfrac{2}{p\tau}\sin\dfrac{p\tau}{2}\cos p\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)-\cos pt\right], & t>\tau\end{cases}$$

**例 4.4.5** 半正弦脉冲激励情形。

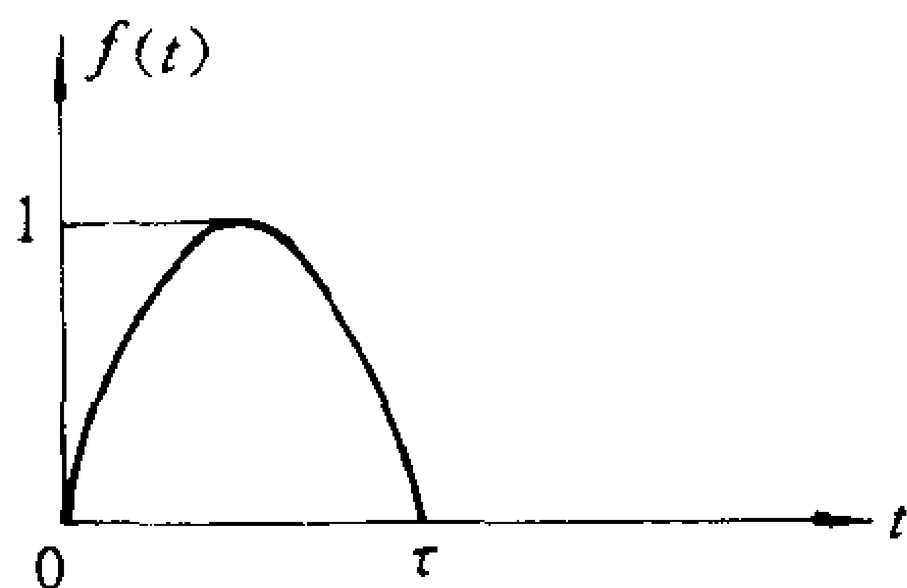



图 4.4.5 半正弦脉冲激励

**解** 半正弦脉冲函数可表示为(见图 4.4.5)

$$f(t)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi t}{\tau}, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0, & t>\tau\end{cases}$$

它又可看做在 $t=0$ 时开始作用的周期为 $2\tau$ 的正弦函数与在 $t=\tau$ 时开始作用的同样的正弦函数之和。所以,它的拉普拉斯变换可表示为

$$F(s)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{\tau}\dfrac{1}{s^2+\dfrac{\pi^2}{\tau^2}}, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ \dfrac{\pi}{\tau}\left(\dfrac{1}{s^2+\dfrac{\pi^2}{\tau^2}}+\dfrac{e^{-\tau s}}{s^2+\dfrac{\pi^2}{\tau^2}}\right), & t>\tau\end{cases}$$

对应于零初始条件,系统响应可表示为

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi X_0 p^2}{\tau}\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+\dfrac{\pi^2}{\tau^2}}\;\dfrac{1}{s^2+p^2}\right], & 0\leqslant t\leqslant\tau\\[2ex] \dfrac{\pi X_0 p^2}{\tau}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+\dfrac{\pi^2}{\tau^2}}\;\dfrac{1}{s^2+p^2}\right]\right.\\[2ex] \left.\qquad+\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-\tau s}}{s^2+\dfrac{\pi^2}{s^2}}\;\dfrac{1}{s^2+p^2}\right]\right\}, & t>\tau\end{cases}$$

注意到

$$\frac{1}{s^2+\dfrac{\pi^2}{\tau^2}}\;\frac{1}{s^2+p^2}=\left(\frac{1}{s^2+\dfrac{\pi^2}{\tau^2}}-\frac{1}{s^2+p^2}\right)\frac{1}{p^2-\dfrac{\pi^2}{\tau^2}}$$

查表B.3序号7及表B.2序号2,有

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi X_0 p^2}{\tau}\;\dfrac{p\sin\left(\dfrac{\pi t}{\tau}\right)-\dfrac{\pi}{\tau}\sin pt}{\left(\dfrac{\pi p}{\tau}\right)\left(p^2-\dfrac{\pi^2}{\tau^2}\right)}, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\[3ex] \dfrac{\pi X_0 p^2}{\tau}\left\{\dfrac{p\sin\left(\dfrac{\pi t}{\tau}\right)-\dfrac{\pi}{\tau}\sin pt}{\left(\dfrac{\pi p}{\tau}\right)\left(p^2-\dfrac{\pi^2}{\tau^2}\right)}\right.\\[3ex] \left.\qquad+\dfrac{p\sin\dfrac{\pi}{\tau}(t-\tau)-\dfrac{\pi}{\tau}\sin p(t-\tau)}{\left(\dfrac{\pi p}{\tau}\right)\left(p^2-\dfrac{\pi^2}{\tau^2}\right)}\right\}, & t>\tau\end{cases}$$

化简可得

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{X_0}{1-\dfrac{T^2}{4\tau^2}}\left(\sin\dfrac{\pi t}{\tau}-\dfrac{T}{2\tau}\sin pt\right), & 0\leqslant t\leqslant\tau\\[2ex] \dfrac{X_0\dfrac{T}{\tau}\cos\dfrac{\pi\tau}{T}}{\dfrac{T^2}{4\tau^2}-1}\sin p\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right), & t>\tau\end{cases}$$

式中 $T=\dfrac{2\pi}{p}$ 是系统的固有振动周期。

## 4.5　冲击响应谱

关于系统对突发性冲击作用下的响应问题，人们关注的是响应中达到的最大值。系统对应冲击作用的响应，在冲击作用结束前后有不同的规律，可划分为前响应与后响应两个阶段。前响应指冲击作用期间的响应，后响应指冲击结束后的响应。系统冲击响应的最大值究竟发生在前响应阶段，还是在后响应阶段，随冲击作用时间的长短以及系统固有周期的大小而异。由于系统在冲击作用下往往很快就达到最大响应值，这时，阻尼还来不及耗散大量机械能；所以，在这类问题的讨论中通常不考虑阻尼的影响。

为了描述系统中冲击应用的特征，通常取系统无量纲响应最大值为纵坐标，取冲击作用时间与系统固有周期之比这一无量纲参数作为横坐标，由此画出的图线称为**冲击响应谱**。工程上在设计承受冲击载荷的设备，或拟订相应的环境模拟试验条件时，常用它作参考。

各类不同形式的冲击作用所对应的冲击响应谱各不相同。本节只举简例说明绘制冲击响应谱的一般步骤。关于各类不同冲击

响应谱的详尽介绍，请参阅有关振动手册①。

**例 4.5.1**　求对应于图 4.4.3 所示矩形脉冲激励的响应谱。

**解**　1自由度无阻尼振系对上述矩形脉冲激励的响应，在例 4.4.3 中已求得为

$$x = X_0(1 - \cos pt), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \tag{a}$$

$$x = X_0[\cos p(t - \tau) - \cos pt], \quad t > \tau \tag{b}$$

先考察 $t \leqslant \tau$ 的情形，由式$(a)$有

$$\dot{x} = X_0 p \sin pt \tag{c}$$

可见，当 $pt < \pi$ 时，有 $\dot{x} > 0$，即 $x$ 尚未达最大值；当 $pt = \pi$ 时，即 $t = \dfrac{\pi}{p} = \dfrac{T}{2}$ 时，$\dot{x} = 0$，$x$ 达最大值 $x_{\max} = 2X_0$。这也就是系统在阶跃激励下可达到的最大响应。这样，只要脉冲终了时刻 $\tau \geqslant \dfrac{T}{2}$，系统的最大响应为常值 $2X_0$。

在 $\tau < \dfrac{T}{2}$ 的情形下，系统最大响应将小于 $2X_0$，而且从前面的讨论可知，这时，$x_{\max}$ 不出现在前响应阶段，而将出现在后响应阶段，即 $t > \tau$ 时。因此，须从式$(b)$求 $x_{\max}$。对式$(b)$求导数，有

$$\dot{x} = X_0 p[\sin pt - \sin p(t - \tau)]$$

令 $\dot{x} = 0$，可得与 $x_{\max}$ 对应的 $t_{\max}$ 满足

$$\sin pt_{\max} = \sin p(t_{\max} - \tau)$$

由此得

$$pt_{\max} = \frac{\pi}{2} + \frac{p\tau}{2} \tag{d}$$

将式$(d)$代入式$(b)$，可得

$$\frac{x_{\max}}{X_0} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p\tau}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{p\tau}{2}\right)$$

---

① C.M. 哈里斯，C.E. 克瑞德主编．冲击与振动手册(第二版)．众师译．北京：科学出版社，1990

$$= 2\sin\frac{p\tau}{2} = 2\sin\frac{\pi\tau}{T} \tag{e}$$

这样，对矩形脉冲的响应谱为

$$\begin{aligned} \frac{x_{\max}}{X_0} &= 2\sin\frac{\pi\tau}{T}, \quad 0 \leqslant \frac{\tau}{T} \leqslant \frac{1}{2} \\ \frac{x_{\max}}{X_0} &= 2, \quad \frac{1}{2} \leqslant \frac{\tau}{T} \end{aligned} \tag{f}$$

如图 4.5.1 所示。

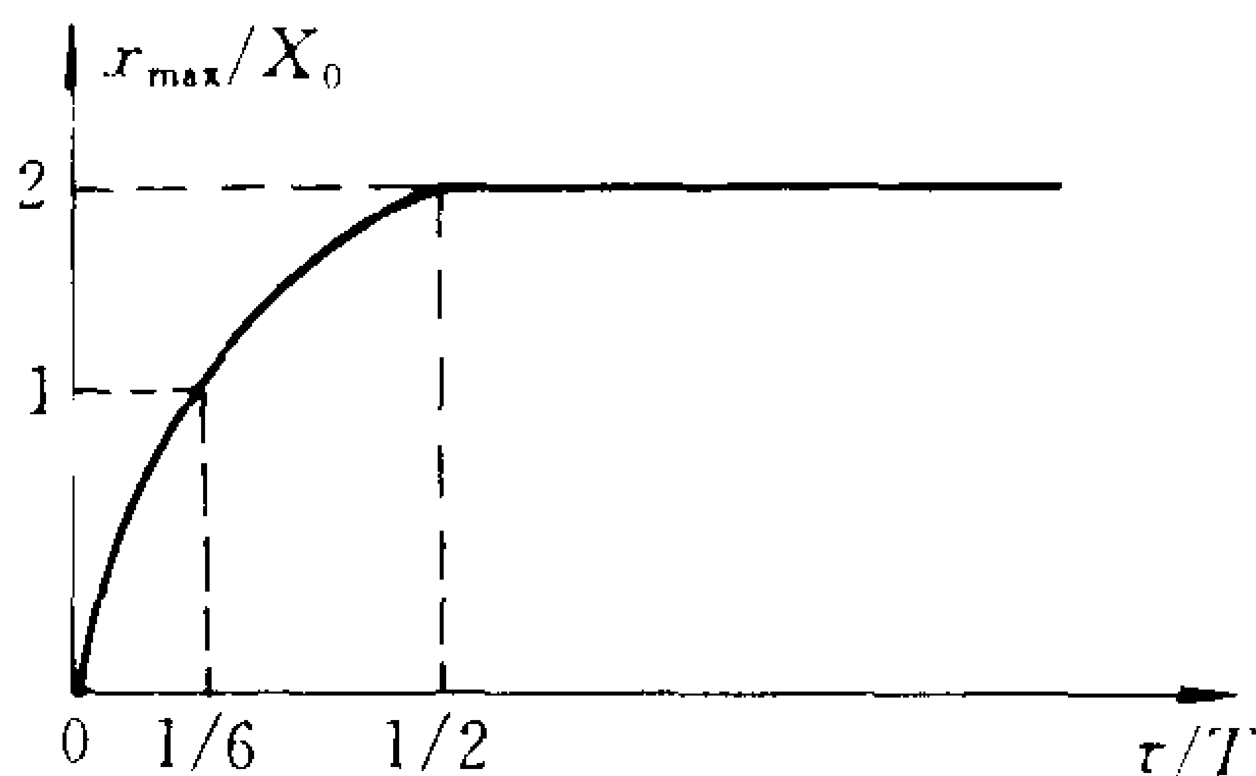



图 4.5.1　对矩形脉冲激励的响应谱

**例 4.5.2**　求对应于图 4.4.2 所示斜坡阶跃激励的响应谱。

**解**　1 自由度无阻尼振系对上述斜坡阶跃激励的响应，在例 4.4.2 中已求得为

$$x = X_0\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sin pt}{p\tau}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \tag{g}$$

$$x = X_0\left[1 + \frac{1}{p\tau}\sin p(t-\tau) - \frac{1}{p\tau}\sin pt\right], \quad t > \tau \tag{h}$$

从上列二式可见，$x_{\max}$ 总是出现在 $t > \tau$ 时，因此，只须考虑式 $(h)$。对它求导数后，令 $\dot{x} = 0$，可得

$$\cos p(t_{\max} - \tau) = \cos pt_{\max}$$

从而有

$$pt_{\max} = \pi + \frac{p\tau}{2} \tag{i}$$

可见 $pt_{\max} \geqslant \pi$。将式($i$)代入式($h$)，有

$$\frac{x_{\max}}{X_0} = 1 + \frac{2}{p\tau}\left|\sin\frac{p\tau}{2}\right| = 1 + \frac{T}{\pi\tau}\left|\sin\frac{\pi\tau}{T}\right|$$

如图 4.5.2 所示。

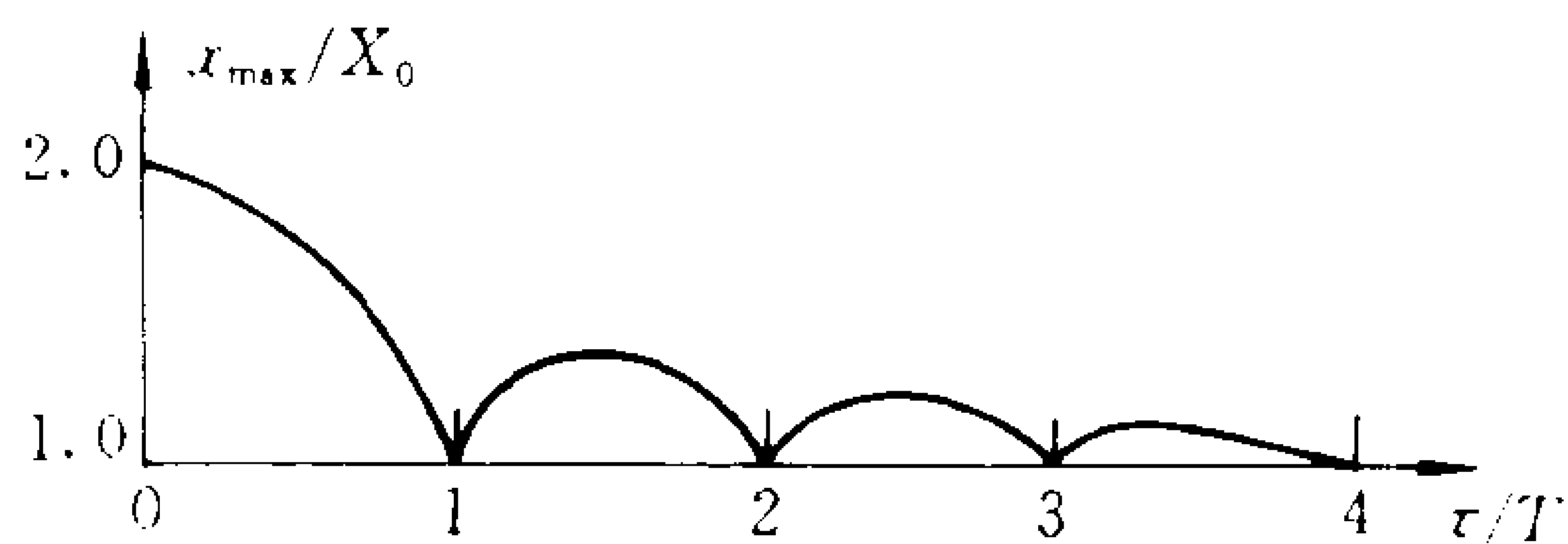



图 4.5.2　对斜坡阶跃激励的响应谱

# 第五章　多自由度线性系统的振动

## 5.1　引　　言

**多自由度系统**指的是具有有限个自由度的振动系统。许多工程振动系统都可简化为这一模型。即使弹性体系统(也称连续系统或分布参数系统),经过适当离散化后,也可以近似地表示为多自由度系统。所以,多自由度系统振动的理论是解决工程振动问题的基础。

1 自由度系统的振动分析是多自由度系统振动分析的基础,在 1 自由度系统振动分析中已经形成的一些重要基本概念和分析结果,只需稍加引申即可适用于多自由度系统。

在 1 自由度线性系统的振动分析中,无论是时域分析,还是频域分析,都是以叠加原理作为基础的。多自由度线性系统的振动分析仍是如此。

1 自由度系统与多自由度系统总称集中参数系统(也称离散系统)。一般说来,一个 $n$ 自由度系统,它的位形可以用 $n$ 个独立坐标来描述,而其运动规律通常可由 $n$ 个二阶常微分方程来确定。

可以这样说,多自由度线性系统振动分析中唯一新增加的重要基本概念是模态这一概念。

**模态**(也称**固有振动模态**,或**主模态**)是多自由度线性系统的一种固有属性,可由系统的特征值(也称固有值)与特征矢量(也称固有矢量,或主振型)二者共同来表示;它们分别从时空两个方面

来刻画系统的振动特性。分析表明，多自由度线性系统的振动（不论是自由振动，还是强迫振动）都可以由各个模态振动叠加而成。

分析表明，一方面，系统特征值确定了各个模态振动的固有频率与阻尼率，从而也就确定了模态脉冲响应函数以及模态频率响应函数。这些正是决定模态运动时间历程的主要因素（内因）。另一方面，系统特征矢量规定了一种空间模式，它确定在模态运动中各个位移分量之间的相对振幅与相位。由此可见，每个特征值与相应的特征矢量构成一个特征对，由它来刻画相应模态运动的时空动态特性。

在振动分析中，随着系统自由度数的增大，计算工作愈益繁复。矩阵既可以为多变量问题提供简洁而又物理概念清晰的表示方式，同时又可以为解题提供系统而又规则的算法；所以，矩阵是分析多自由度系统振动问题的有力工具。多自由度振动系统的特征值问题通常归结为矩阵特征值问题，它是多自由度系统振动分析的重点之一。

1 自由度系统基本上是单输入/单输出系统，只需要单个脉冲响应函数或频率响应函数就足以描述其动态特性。而多自由度系统本质上是多输入/多输出系统，因此需要用脉冲响应函数矩阵或频率响应函数矩阵来描述它的全部动态响应特性。这些动态特性矩阵既可以从系统本身直接得出；也可以通过模态分析，由各个模态的动态响应特性得出。

本章所考察的系统限于常参数线性系统。常参数（即非时变）系统是指导系统本身的特性（例如质量、阻尼、刚度，或模态参数等）不随时间变化的情形。线性系统是指叠加原理适用的情形。线性系统的这一假设为振动分析带来极大的方便。

我们在上一章已经看到，基于叠加原理，可以将一个任意的激励分划成一系列冲量微元之和，分别求出系统对每个冲量微元的响应，再叠加后得到系统总的响应。

基于叠加原理，也可以将一个任意的激励用傅里叶分析展开为一系列谐和分量之和，分别求出系统对每个谐和分量的响应，再叠加后得到系统总的响应。

同样还是基于叠加原理，一个多自由度系统的运动，可以通过所谓模态变换，分解为若干个独立的模态运动，其中每个模态运动相当于一个1自由度系统的运动。因此，可以方便地分别求出各个模态运动，再叠加后得到系统总的运动。这就是系统动力响应分析中的模态分析法，也是本章的重点所在。

此外，本章还将对系统的特征值问题(包括半定系统的特征值问题)及特征值与特征矢量的摄动问题展开适当讨论，并介绍工程振动问题中常用的一些分析方法。

## 5.2 系统振动微分方程的一般形式

在讨论1自由度系统的振动时，我们基本上是从牛顿定律出发来导出系统的运动微分方程的。对于多自由度系统，如果还采用这种方法，一般都是要取分离体，分别列出各个分离体的运动微分方程。这就必须考虑各个分离体之间的相互作用。同时，在受约束的系统中，还必须考虑约束的作用，因而在考察复杂的振动系统时，这种方法有时会带来一些不必要的麻烦。

另一种方法，即分析力学的方法，是从系统总体出发来列运动方程的。它一般采用广义坐标来确定系统的位置，用动能与功这样一些纯量来描述系统的运动量与相互作用，并用拉格朗日方程或者与之等价的一些变分原理来描述系统的运动规律。对于复杂系统来说，这一方法有很大的优越性。

本节将不加推导地引出拉格朗日方程，并用它来列写微振动情形下的系统运动微分方程。

### 5.2.1　拉格朗日方程

设有质量为 $m_i(i=1, \cdots, N)$ 的 $N$ 个质量组成的系统，作用有 $l$ 个完整的理想约束，故系统自由度数为 $n=3N-l$。因而，系统中各个质点的矢径 $r_i$ 都可以表示为 $n$ 个广义坐标 $q_i(j=1, \cdots, n)$ 与时间 $t$ 的函数，即有

$$r_i = r_i(\boldsymbol{q}, t), \quad i = 1, \cdots, n \tag{5.2.1}$$

而系统的动能 $E_\mathrm{k}$ 可表示为

$$E_\mathrm{k} = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i = E_\mathrm{k}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \tag{5.2.2}$$

这时，广义坐标形式下的拉格朗日方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{k}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{k}}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \cdots, n \tag{5.2.3}$$

其中 $Q_i$ 为对应于广义坐标 $q_j$ 的广义力。

拉格朗日方程是一组关于 $n$ 个广义坐标 $q_j$ 的二阶常微分方程。采用这一方法列写方程时，不必取分离体，也不必考虑理想约束的反力，它有统一的格式和步骤。其主要步骤如下：

(1) 选定系统的独立广义坐标 $q_j$；

(2) 写出广义坐标形式下的系统动能表示式 $E_\mathrm{k}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$，并计算有关导数；

(3) 求出对应于各个广义坐标的广义力 $Q_j$。

求广义力的一般法则如下：广义力的定义是根据“广义力在广义坐标虚位移上所做虚功之和等同于系统主动力在物理坐标虚位移上所做虚功之和”得来的，注意，系统中各个质点的虚位移可表示为相应矢径的等时变分，即

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{5.2.4}$$

设作用于质点 $m_i$ 上的主动力合力为 $F_i$，则系统所有主动力在系统

虚位移上所做虚功之和为

$$\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta r_i = \sum_i F_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j$$
$$= \sum_j \left\{ \sum_i F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

因此，广义力 $Q_j$ 可定义为

$$Q_j \equiv \sum_i F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \tag{5.2.5}$$

当广义力与广义速度无关时，即

$$Q_j = Q_j(\boldsymbol{q},\ t)$$

再设存在函数 $E_p(\boldsymbol{q},\ t)$，并有

$$Q_j = -\frac{\partial E_p}{\partial q_j} \tag{5.2.6}$$

这时的广义力 $Q_j$ 称为有势力，而 $E_p$ 称为势能。当势能 $E_p$ 不明显依赖于 $t$ 时，有势力也称保守力。对于主动力仅为有势力的系统，拉格朗日方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \cdots, n \tag{5.2.7}$$

当广义力中只有一部分是有势力时，拉格朗日方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = Q_j', \quad j = 1, \cdots, n \tag{5.2.8}$$

其中 $Q_j'$ 代表广义力中非有势力的那一部分。

在非保守力中，阻尼有重要地位。假设存在耗能函数 $E_d(\dot{q},\ t)$，且设广义阻尼力可表示为

$$Q_j = -\frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_j} \tag{5.2.9}$$

对于仅受有势力与上述阻尼力作用的情形，拉格朗日方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_j} = 0 \tag{5.2.10}$$

设系统除上述力外，还作用有其它广义力 $Q_j''$，则拉格朗日方

程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_{\mathrm{k}}}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E_{\mathrm{k}}}{\partial q_j}+\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial q_j}+\frac{\partial E_{\mathrm{d}}}{\partial \dot{q}_j}=Q_j'' \qquad (5.2.11)$$

**例 5.2.1**　图 5.2.1 所示 1 自由度系统为建筑物的简化模型，用于考察建筑物对地震的响应。建筑物上部为刚体，质量为 $M$，绕其重心 $o$ 的转动惯量为 $J_o$，重心 $o$ 至支点 $A$ 的距离为 $a$；建筑物下座为刚体，质量为 $m$，可沿水平方向左右平移，下座与地基之间由水平方向的弹簧 $k$ 与阻尼器 $c$ 相并连；建筑物上体与下座之间，除铰接于 $A$ 点外，还连接一铅垂平面内的扭转弹簧，刚度为 $K$。设地基作给定的水平运动 $z(t)$，取下座的水平位移 $u$ 与上体在铅垂面内的摆角 $\theta$ 作为广义坐标，再设 $\theta$ 为小量。试列出系统的运动微分方程。

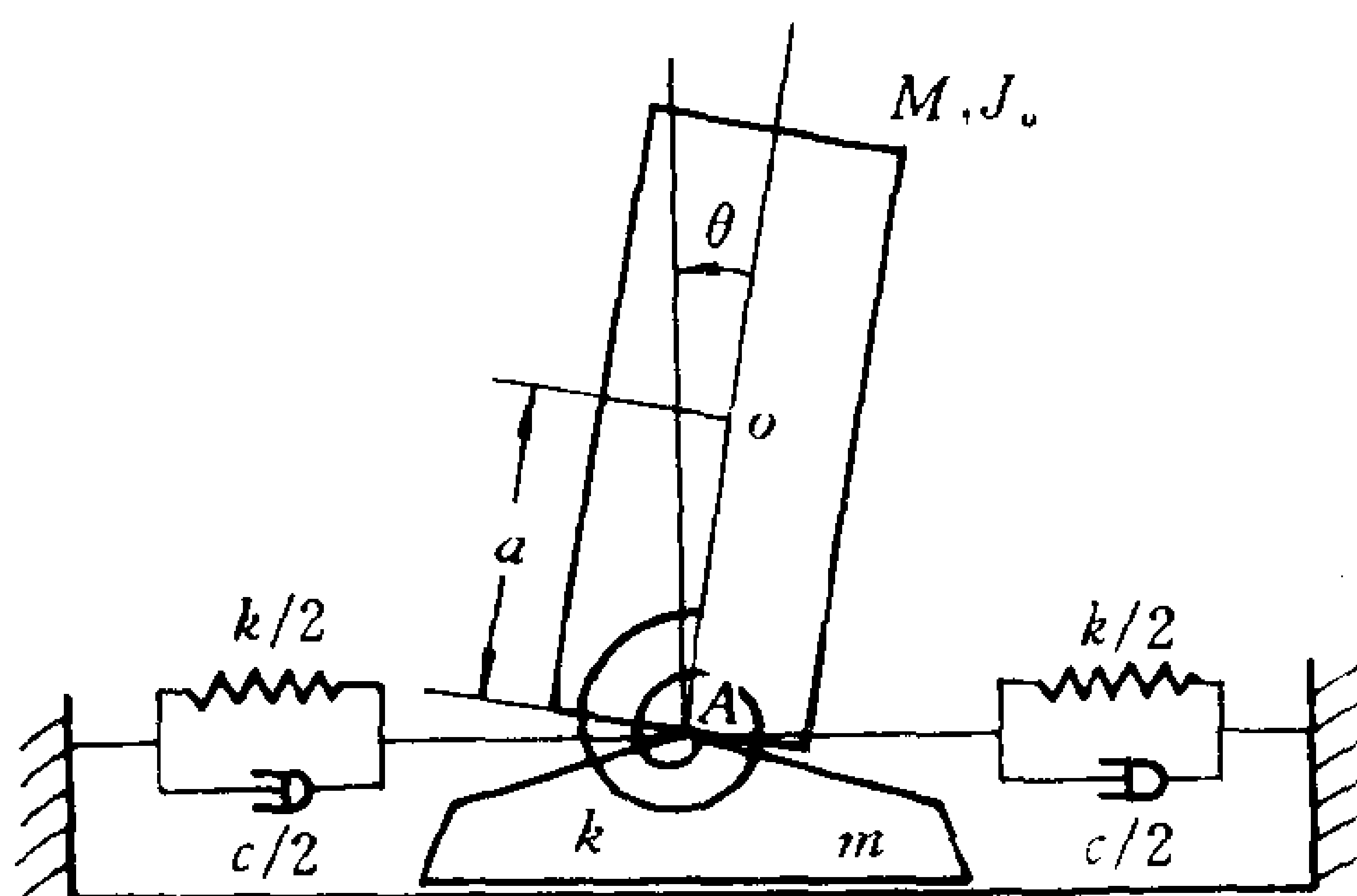



图 5.2.1　建筑物简化模型

**解**　系统的动能可表示为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}m\dot{u}^2+\frac{1}{2}M(\dot{x}_o^2+\dot{y}_o^2)+\frac{1}{2}J_o\dot{\theta}^2$$

由微振动假设，有

$$\dot{x}_o=\dot{u}+a\dot{\theta},\quad \dot{y}_o=0$$

故有

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}M\dot{u} + a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J_o\dot{\theta}^2$$

系统的势能可表示为

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}k(u - z)^2 + \frac{1}{2}K\theta^2 + Mga\cos\theta$$

精确到包含二阶小量，可取 $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2$。而系统的耗能函数可取为

$$E_{\mathrm{d}} = \frac{1}{2}c(\dot{u} - \dot{z})^2$$

将它们代入拉格朗日方程(5.2.11)，可得

$$(M + m)\ddot{u} + Ma\ddot{\theta} + c\dot{u} + ku = c\dot{z} + kz$$

$$Ma\ddot{u} + (Ma^2 + J_o)\ddot{\theta} + (K - Mga)\theta = 0$$

### 5.2.2　微振动方程

线性系统在稳定平衡位置附近作微幅振动，其运动微分方程的一般形式可由拉格朗日方程导出如下。设系统是由 $N$ 个质点组成的、有 $n$ 个自由度的完整系统。由微幅振动的假设，系统的各个广义坐标 $q_k$ 与广义速度 $\dot{q}_k$ 都可看做一阶小量，从而导出的微幅振动方程也将精确到一阶小量。这时，计算拉格朗日方程中的各个导数 $\frac{\partial E_{\mathrm{k}}}{\partial \dot{q}_k}$、$\frac{\partial E_{\mathrm{k}}}{\partial q_k}$ 以及 $\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial q_k}$ 等也只需精确到一阶小量。但考虑到对 $q_k$、$\dot{q}_k$ 求导数时，各个量的精度将降低一阶，所以在计算系统的动能 $E_{\mathrm{k}}$ 与势能 $E_{\mathrm{p}}$ 时，必须精确到二阶小量。

设系统的约束为定常的，即有

$$r_i = r_i(\boldsymbol{q}),\quad i = 1,\ \cdots,\ N$$

这时，系统的动能可表示为

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{r}_i \cdot \dot{r}_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\sum_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\cdot\left(\sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_k\sum_j\left(\sum_i m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j$$

注意，$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}$一般仅是各个广义坐标的函数，它在平衡位置 $q_1 = \cdots = q_n = 0$ 附近的泰勒展式可写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right)_0 + \sum_j\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right)\right)_0 q_j + \cdots$$

式中下标 0 表示括号内的量取 $q_1 = \cdots = q_n = 0$ 时的值。考虑到动能表示式只需保留到二阶小量，故式中的$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}$与$\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$只需保留其泰勒级数中的常数项。记

$$m_{kj} = \sum_i m_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right)_0\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)_0 = m_{jk} \tag{5.2.12}$$

于是，系统的动能 $E_k$ 可表示为

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_k\sum_j m_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j \tag{5.2.13}$$

写成矩阵形式，有

$$E_k = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{5.2.13a}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 为广义速度列阵，$\boldsymbol{M} = [m_{kj}]$ 为系统的质量矩阵。由式(5.2.12)可见，质量矩阵为对称阵。

在定常约束情形下，系统的势能仅是广义坐标的函数，即有

$$E_p = E_p(\boldsymbol{q})$$

它在平衡位置附近的泰勒展式为

$$E_p = E_p(0) + \sum_k\left(\frac{\partial E_p}{\partial q_k}\right)_0 q_k + \frac{1}{2}\sum_r\sum_s\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial q_r\partial q_s}\right)_0 q_r q_s + \cdots$$

考虑到在系统平衡位置处，有

$$\left(\frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial q_k}\right)_0 = 0, \quad k = 1, \cdots, n$$

且不失一般性，可取

$$E_{\mathrm{p}}(0) = 0$$

故在 $E_{\mathrm{p}}$ 的泰勒展式中略去二阶以上的小量后，可得

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\sum_r \sum_s k_{rs} q_r q_s \tag{5.2.14}$$

其中

$$k_{rs} = \left(\frac{\partial^2 E_{\mathrm{p}}}{\partial q_r \partial q_s}\right)_0 = k_{sr} \tag{5.2.15}$$

将势能写成矩阵形式，有

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{q} \tag{5.2.14a}$$

其中 $q$ 为广义坐标列阵，$\boldsymbol{K} = [k_{rs}]$ 为系统的刚度矩阵。由式(5.2.15)可见，刚度矩阵也是对称阵。

至于系统的阻尼，在线性模型下可由瑞利耗能函数 $E_{\mathrm{d}}$ 表示为

$$E_{\mathrm{d}} = \frac{1}{2}\sum_r \sum_s c_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s \tag{5.2.16}$$

且有 $c_{rs} = c_{sr}$，将 $E_{\mathrm{d}}$ 写成矩阵形式，有

$$E_{\mathrm{d}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{q}} \tag{5.2.16a}$$

式中 $\boldsymbol{C} = [c_{rs}]$ 为阻尼矩阵，按假设 $\boldsymbol{C}$ 也是对称阵。

将上述 $E_{\mathrm{k}}$、$E_{\mathrm{p}}$ 与 $E_{\mathrm{d}}$ 代入拉格朗日方程(5.2.11)，可得

$$\sum_{s=1}^{n}(m_{rs}\ddot{q}_s + c_{rs}\dot{q}_s + k_{rs}q_s) = Q_r, \quad r = 1, \cdots, n \tag{5.2.17}$$

或写成矩阵形式，有

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q} \tag{5.2.17a}$$

式中 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 分别为系统的质量、阻尼与刚度矩阵，而 $\boldsymbol{Q}$ 为广义扰力列阵。由此可见，一个 $n$ 自由度线性系统的微振动微分方程一

般可表示 $n$ 个联立的二阶常微分方程。

**例 5.2.2**　设有图 5.2.2 所示由多个质量、弹簧与阻尼器串联而成的多自由度线性阻尼系统。试导出其微振动微分方程。

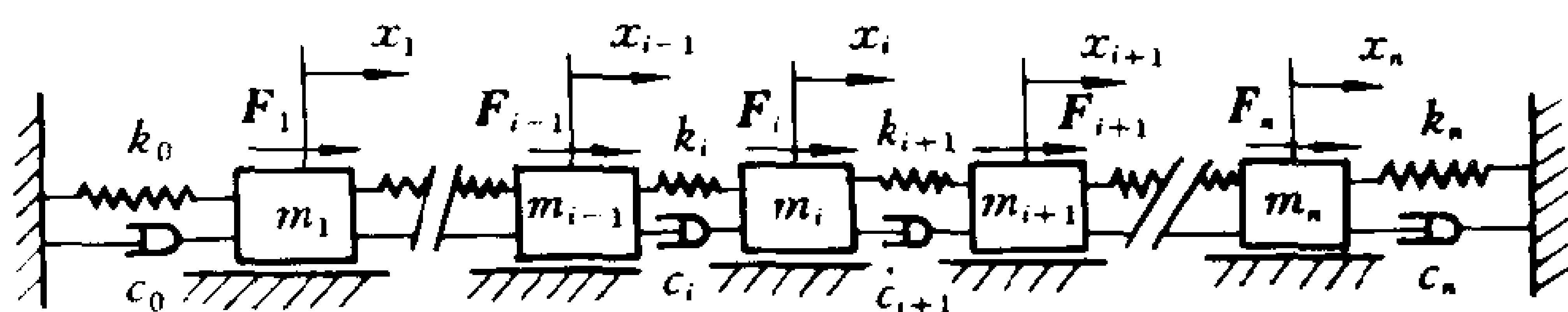



图 5.2.2　串联系统

**解**　取各个物理坐标 $x_i(i=1,\cdots,n)$ 作为广义坐标，系统的动能可表示为

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{x}_i^2$$

系统的势能可表示为

$$\begin{aligned}E_p &= \frac{1}{2}k_0x_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}k_i(x_{i+1}-x_i)^2 + \frac{1}{2}k_nx_n^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(k_{i-1}+k_i)x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1}k_ix_ix_{i+1}\end{aligned}$$

而系统的耗能函数可表示为

$$\begin{aligned}E_d &= \frac{1}{2}c_0\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}c_i(\dot{x}_{i+1}-\dot{x}_i)^2 + \frac{1}{2}c_n\dot{x}_n^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(c_{i-1}+c_i)\dot{x}_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1}c_i\dot{x}_i\dot{x}_{i+1}\end{aligned}$$

考虑到，本例中广义坐标等同于物理坐标，因而广义力就等同于扰力，即

$$Q_i = F_i,\qquad i=1,\cdots,n$$

将它们代入拉格朗日方程(5.2.11)，可得

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}$$

其中

$$\boldsymbol{x} = [x_1 \cdots x_n]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{Q} = [F_1 \cdots F_n]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{M} = \mathrm{diag}[m_i]$$
$$\boldsymbol{C} = \mathrm{trid}[c_{ij}]$$
$$c_{ii} = c_{i-1} + c_i, \quad i = 1, \cdots, n$$
$$c_{i,i+1} = c_{i+1,i} = -c_i, \quad i = 1, \cdots, n-1$$
$$K = \mathrm{trid}[k_{ij}]$$
$$k_{ii} = k_{i-1} + k_i, \quad i = 1, \cdots, n$$
$$k_{i,i+1} = k_{i+1,i} = -k_i, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

**例 5.2.3** 当考察车辆在其对称铅垂平面内的上下振动与俯仰振动时，可以将车身视为刚体，将前后桥视为质点；同时，将悬架系统与轮胎的质量略去不计，而仅考虑它们的弹性与阻尼。这时，车辆的半车简化模型可表示为图 5.2.3 中的 4 自由度系统。试列出其自由振动方程。

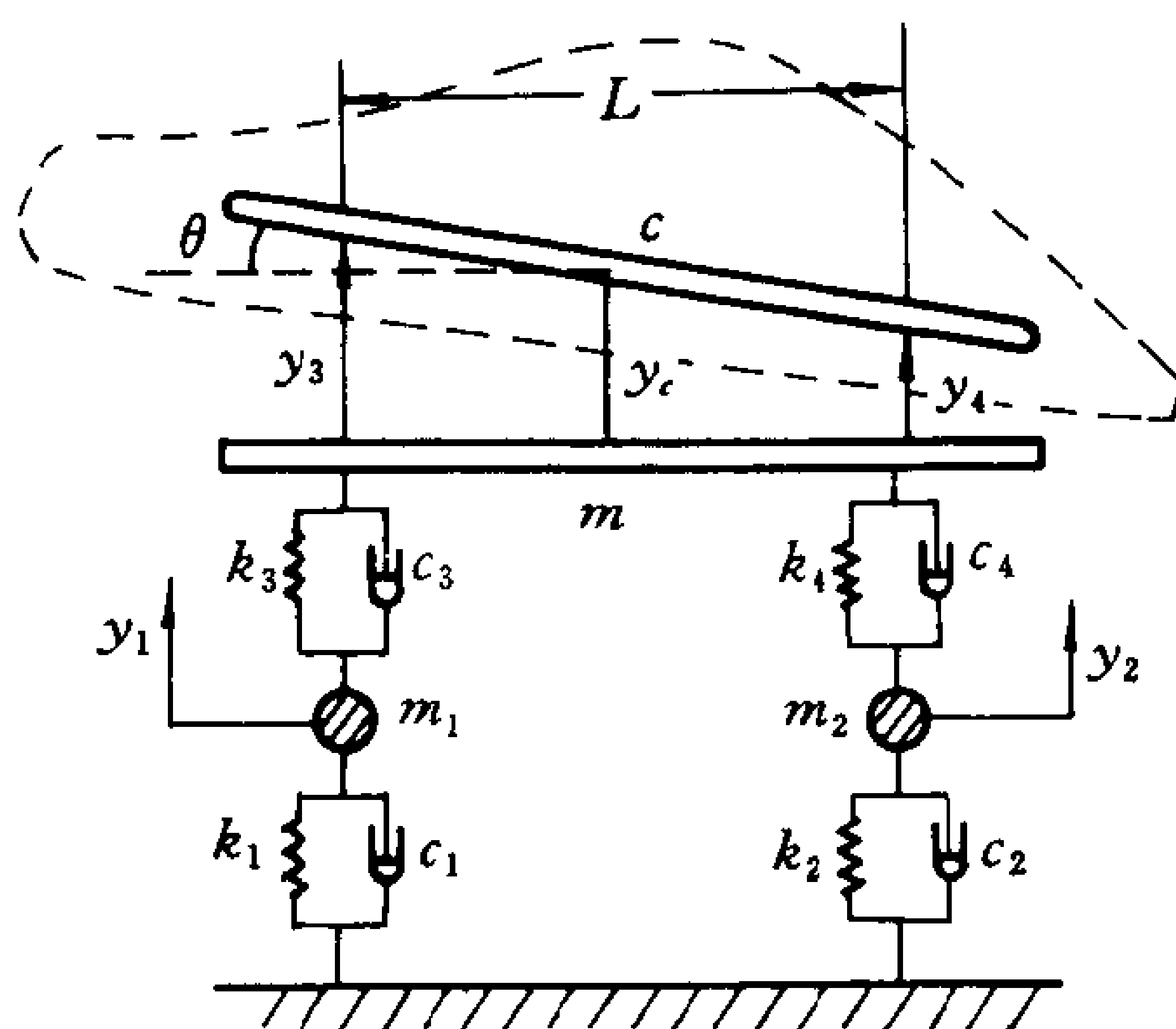



图 5.2.3 汽车简化模型

**解** 系统各项物理参数大致已在图 5.2.3 中标明。取 $\boldsymbol{y} =$

$[y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4]^{\mathrm{T}}$ 作为广义坐标列阵。设车体绕其质心 $c$ 的转动惯量 $J_c = mr_c^2 = \alpha mL^2$。这时，车体质心 $c$ 的上下位移可表示为

$$y_c = \frac{y_3 + y_4}{2}$$

车体绕 $c$ 点的俯仰角位移 $\theta_c$ 可表示为

$$\theta_c = \frac{y_3 - y_4}{L}$$

因而，系统的动能可表示为

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{k}} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m_i \dot{y}_i^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_c^2 + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}_c^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{8} m(\dot{y}_3 + \dot{y}_4)^2 + \frac{\alpha}{2} m(\dot{y}_3 - \dot{y}_4)^2\end{aligned}$$

系统的势能可表示为

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2 + \frac{1}{2} k_3 (y_3 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_4 (y_4 - y_2)^2$$

而系统的耗能函数可表示为

$$E_{\mathrm{d}} = \frac{1}{2} c_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} c_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} c_4 (\dot{y}_4 - \dot{y}_2)^2$$

将它们代入拉格朗日方程(5.2.11)，可得

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = 0$$

其中

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\dfrac{1}{4} + \alpha\right) & m\left(\dfrac{1}{4} - \alpha\right) \\ 0 & 0 & m\left(\dfrac{1}{4} - \alpha\right) & m\left(\dfrac{1}{4} + \alpha\right) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_1+c_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & c_2+c_4 & 0 & -c_4 \\ -c_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & -c_4 & 0 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_3 & 0 & -k_3 & 0 \\ 0 & k_2+k_4 & 0 & -k_4 \\ -k_3 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & -k_4 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

**例 5.2.4** 双物理摆由两根长度各为 $l$、质量各为 $m$ 的刚性匀质细杆构成，如图 5.2.4 所示。上摆铰支于 $o$ 轴，上下摆于 $A$ 点处铰接，双摆限于在铅垂平面 $xoy$ 内运动。试列出双摆在其铅直平衡位置附近作微振动的运动微分方程。

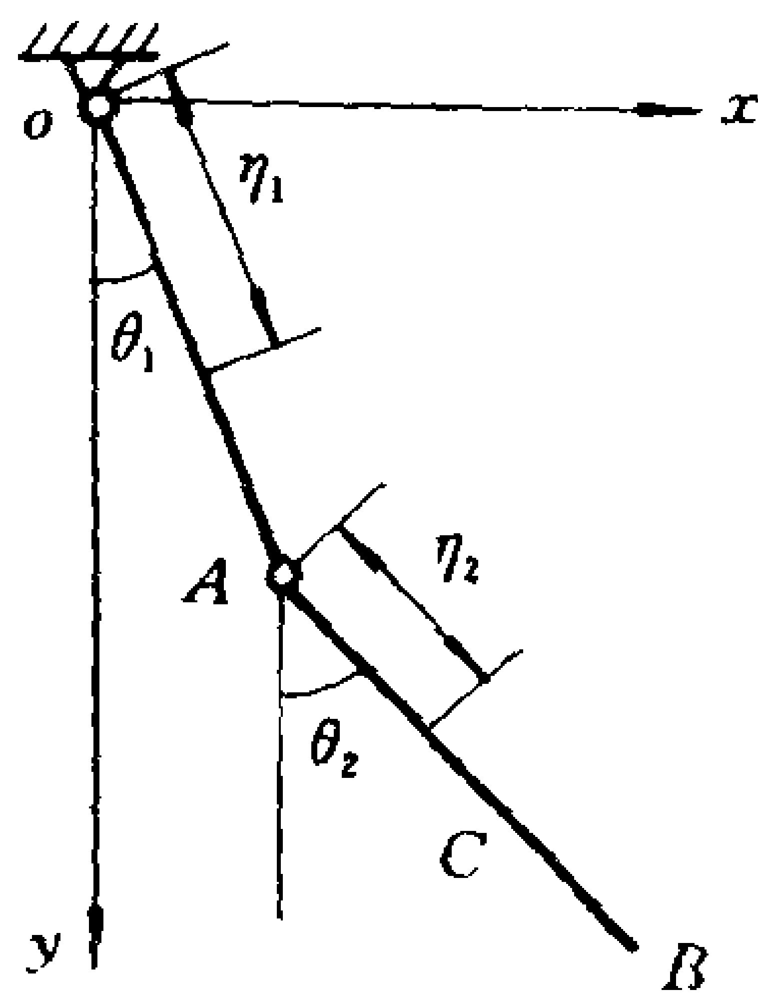



图 5.2.4 双物理摆

**解** 系统具有两个自由度，可以取上下摆与铅垂线之间的夹角 $\theta_1$ 与 $\theta_2$ 作为广义坐标，这时，系统的平衡位置对应于 $\theta_1=\theta_2=0$。

记上摆绕 $o$ 轴的转动惯量为 $I_o$，有 $I_o=\frac{1}{3}ml^2$；于是，上摆的动能可表示为

$$E_{k1}=\frac{1}{2}I_o\dot{\theta}_1^2=\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}_1^2$$

下摆在 $xoy$ 平面内作平面运动，记下摆的质心为 $c$，下摆绕质心轴的转动惯量为 $I_c$，有 $I_c=\frac{1}{12}ml^2$；于是，下摆的动能可表示为

$$E_{k2}=\frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2)+\frac{1}{2}I_c\dot{\theta}_2^2$$

注意到

$$x_c = \frac{l}{2}(2\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$$

$$y_c = \frac{l}{2}(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

利用上式，下摆的动能最终可表示为

$$E_{k2} = \frac{ml^2}{8}[4\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1)] + \frac{ml^2}{24}\dot{\theta}_2^2$$

因此，双摆的总动能为

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} = \frac{ml^2}{6}[4\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1)] \quad (a)$$

仅考虑对摆作微振动时，可略去动能表示式中三阶和三阶以上小量，可取 $\cos(\theta_2 - \theta_1) \approx 1$，于是有

$$E_k = \frac{ml^2}{6}(4\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)$$

约定取双摆位于平衡位置处的重力势能为零，这时，上摆的重力势能为

$$E_{p1} = \frac{mgl}{2}(1 - \cos\theta_1)$$

下摆的重力势能为

$$E_{p2} = \frac{mgl}{2}[2(1 - \cos\theta_1) + (1 - \cos\theta_2)]$$

于是双摆的重力势能为

$$E_{pg} = E_{p1} + E_{p2} = \frac{mgl}{2}(4 - 3\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad (b)$$

仅考虑微振动时，略去三阶和三阶以上小量，可得

$$E_p = \frac{mgl}{4}(3\theta_1^2 + \theta_2^2)$$

将以上所得系统动能与重力势能的表示式代入拉格朗日方程，并记 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$，可得双摆微幅自由振动时的运动微分方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}$$

其中

$$\boldsymbol{M} = \frac{ml^2}{6}\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \frac{mgl}{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**例 5.2.5** 在上例中，再设坐标系 $xoy$ 连同双摆一起绕铅垂轴 $oy$ 以匀速 $\omega$ 转动。试述双摆相对于旋转坐标系 $xoy$ 的运动微分方程的列法。

**解** 双摆相对于坐标系 $xoy$ 的动能与重力势能已由上例中式($a$)与式($b$)给出。考虑到坐标系 $xoy$ 以匀速 $\omega$ 作定轴转动，由此形成一离心力场，其中任一距离转轴为 $r$，且质量为 $M$ 的质点，它所具有的离心力势能可表示为 $-Mr^2\omega^2$。因此，记上摆沿杆长方向的流动坐标为 $\eta_1$，则上摆的离心力势能可求得为

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{pe1}} &= -\frac{m\omega^2}{l}\int_0^l \eta_1^2 \sin^2\theta_1 \mathrm{d}\eta_1 \\ &= -\frac{1}{3}ml^2\omega^2\sin^2\theta_2 \end{aligned}$$

再记下摆沿杆长方向的流动坐标为 $\eta_2$，则下摆的离心力势能可求得为

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{pe2}} &= -\frac{m\omega^2}{l}\int_0^l (l\sin\theta_1 + \eta_2\sin\theta_2)^2 \mathrm{d}\eta_2 \\ &= -\frac{1}{3}ml^2\omega^2(3\sin^2\theta_1 + 3\sin\theta_1\sin\theta_2 + \sin^2\theta_2) \end{aligned}$$

于是，双摆的离心力势能可表示为

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{pe}} &= E_{\mathrm{pe1}} + E_{\mathrm{pe2}} \\ &= -\frac{1}{3}ml^2\omega^2(4\sin^2\theta_1 + 3\sin\theta_1\sin\theta_2 + \sin^2\theta_2) \end{aligned}$$

因此，在上述旋转坐标系中双摆的总势能为

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{p}} &= E_{\mathrm{pg}} + E_{\mathrm{pe}} \\ &= \frac{1}{2}mgl(4 - 3\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{3}ml^2\omega^2(4\sin^2\theta_1+3\sin\theta_1\sin\theta_2+\sin^2\theta_2) \tag{c}$$

将式($a$)与式($c$)代入拉格朗日方程，即可求得双摆在旋转坐标系中的运动微分方程。

# 5.3 实模态分析

## 5.3.1 无阻尼情形

首先考察无阻尼多自由度线性振动系统，它的运动微分方程可表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t) \tag{5.3.1}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 是位移列阵；$\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 分别为系统的质量与刚度矩阵，它们都是 $n\times n$ 阶实对称阵，且 $\boldsymbol{M}$ 设为正定①；$\boldsymbol{f}(t)$ 是激励列阵。

这一系统的自由振动微分方程可表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=0 \tag{5.3.2}$$

它的解可设为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}\sin(pt+\varphi) \tag{5.3.3}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 为振幅列阵，$p$ 为圆频率，$\varphi$ 为初相位，它们都是待定的量。将上式代入自由振动微分方程，可得

$$[\boldsymbol{K}-p^2\boldsymbol{M}]\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \tag{5.3.4}$$

这一方程具有非零解的条件是

$$|\boldsymbol{K}-p^2\boldsymbol{M}|=0 \tag{5.3.5}$$

它称为系统的特征方程。由此可确定 $p^2$ 的 $n$ 个正实根 $p_i^2$，并按 $p_i\leqslant p_{i+1}$ 排列，$i=1,\cdots,n$。$p_i$ 称为系统的**固有频率**。将各个不同的 $p_i$ 逐一代入式(5.3.4)，可得下列主振型方程

① 若对于任意的 $\boldsymbol{X}\neq 0$，有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}>0$，则称 $\boldsymbol{M}$ 为正定的。

$$[\boldsymbol{K}-p^2\boldsymbol{M}]\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{0},\quad i=1,\cdots,n \qquad (5.3.6)$$

由此，在不计任意倍数差别的意义下，可确定 $n$ 个实矢量 $\boldsymbol{X}_i$，[①]称为系统的**主振型**(也称特征矢量)。由下式

$$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{X}_i\sin(p_it+\varphi),\quad i=1,\cdots,n$$

表示的运动称为系统的**主振动**(也称固有振动)。可见，无阻尼线性系统的主振动都是谐振动。每个主振动有其固有的频率 $p_i$。在每个主振动中，各个位移分量振幅的相对大小与相位由主振型 $X_i$ 确定。在这种情形下，系统的特征矢量都是实矢量，故也称实模态。这时，同号的各个位移分量的运动是同相的，异号的各个位移分量的运动是相互反相的。

主振型的一个重要性质是**正交性**。这种正交性表现为关于质量矩阵与刚度矩阵的加权正交性，即当 $i\neq j$ 时，有

$$\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{X}_j=0,\quad \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{X}_j=0 \qquad (5.3.7)$$

事实上，$\boldsymbol{X}_i$ 与 $\boldsymbol{X}_j$ 分别为系统的第 $i$ 个与第 $j$ 个主振型，因而有

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{X}_i=p_i^2\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{X}_i,\quad \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{X}_j=p^2\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{X}_j$$

将第一式转置，再后乘以 $\boldsymbol{X}_j$；对第二式前乘以 $\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}$，然后两者相减，可得

$$(p_i^2-p_j^2)\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{X}_j=0 \qquad (5.3.8)$$

考虑到 $p_i$ 不等于 $p_j$，于是式(5.3.7)中的第一式得证；同理可证明其第二式。

注意到当 $i=j$ 时，不论 $\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{X}_i$ 取何有限值，式(5.3.8)恒成立，因而可取

$$M_i=\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_i,\quad K_i=\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{X}_i \qquad (5.3.9)$$

其中 $M_i$ 称为模态质量，$K_i$ 称为模态刚度，且有

$$p_i^2=\frac{K_i}{M_i}$$

---

① 注意到式(5.3.6)是齐次方程，因而，$c_iX_i$ 也是它的解，其中 $c_i$ 是任意常数乘子。根据分析需要，我们可以保留这一任意性，也可以通过归一化来唯一地确定 $\boldsymbol{X}_i$。

引入实模态矩阵 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{X}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{X}_n]$$

则上述结果可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}[M_i], \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}[K_i]$$

系统的主振型通常只确定到包含一个任意常数乘子，因而可以选取归一化振型如下：即选取这样的 $\boldsymbol{X}_i$，使式(5.3.9)中各个 $M_i$ 都等于1，而这时各个 $K_i$ 就等于 $p_i^2$。

上述主振型的正交性非常重要。根据它可以通过实模态变换来使系统(5.3.1)解耦，引入如下实模态变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{5.3.10}$$

不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 中各个主振型均已归一化，对方程(5.3.1)前乘以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，并用上述实模态变换代入，可得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t) \tag{5.3.11a}$$

由上述正交性，即得

$$\ddot{\boldsymbol{y}} + \mathrm{diag}[p_i^2]\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t) \tag{5.3.11}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t)$ 称为广义激励(也称模态激励)列阵，记为

$$\boldsymbol{q}(t) = [q_i(t)] = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t)$$

于是，式(5.3.11)也可写成标量形式

$$\ddot{y}_i + p_i^2 y_i = q_i(t), \quad i = 1, \cdots, n \tag{5.3.12}$$

可见，系统已经完全解耦了。各个 $y_i$ 称为模态坐标，而由方程(5.3.12)确定的 $y_i(t)$ 称为模态响应。由式(5.3.10)，系统的物理坐标响应 $\boldsymbol{x}$ 可表示为模态响应 $\boldsymbol{y}$ 的线性变换。

综上所述，一个 $n$ 自由度的无阻尼线性系统的响应问题，通过实模态变换，可以转化为 $n$ 个独立谐振子的模态响应问题，而后者的求解是十分方便的。在求得各个模态响应后，再通过线性变换，就可得到原系统的响应。这就是模态分析法的精髓所在。

现在来看方程(5.3.11$a$)的几何和物理意义。

一个 $n$ 自由度振动系统的运动相当于 $n$ 维线性空间 $\boldsymbol{X}$ 中的一

个质点的运动。质点的矢径可表示为 $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}$，质点的惯性用矩阵 $\boldsymbol{M}$ 来表征，弹性力特性用矩阵 $\boldsymbol{K}$ 来表征，而 $\boldsymbol{f}(t)$ 代表作用于该质点的激振力矢量。线性空间 $\boldsymbol{X}$ 的基底矩阵由单位阵表示。进行式(5.3.10)所示实模态变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，意味着由空间 $\boldsymbol{X}$ 变换到 $n$ 维模态空间 $\boldsymbol{Y}$，后者的基底矩阵由 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{X}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{X}_n]$ 表示，其中各个归一化主振型矢量 $\boldsymbol{X}_i$ 分别代表模态坐标轴的单位矢量。

将 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 代入系统运动微分方程(5.3.1)，可得

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(t)$$

对上式前乘以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，也就是将上式向空间 $\boldsymbol{Y}$ 的各个模态坐标轴上进行投影，由此得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t)$$

上式右端矢量的各个分量即 $\boldsymbol{f}(t)$ 在各个模态坐标轴上的投影，称为各相应模态的模态激励。

众所周知，在直观的三维直角坐标系 $xoyz$ 中，单个质点的运动规律(例如牛顿定律，动量定理等)在各个坐标轴上都有相应的投影定理。以上讨论不过是这一结果在抽象的 $n$ 维线性空间的推广。

主振型之间的加权正交性，保证了各个模态运动的独立性，从而使问题得到了简化。

另一方面，从广义坐标法的角度来看，系统在原坐标系中，动能 $E_{\mathrm{k}}$ 与势能 $E_{\mathrm{p}}$ 可分别表示为

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}, \quad E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

经模态变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 后，在模态坐标系中，系统的动能与势能将分别表示为

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}[M_i]\dot{\boldsymbol{y}}$$

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}[K_i]\boldsymbol{y}$$

从这个意义上来说，模态变换和线性代数中将二次型化为标准型又是同一回事。

若将原坐标系与模态坐标系中对应的虚位移分别记为 $\delta\boldsymbol{x}$ 与 $\delta\boldsymbol{y}$，则有

$$\delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = \delta\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

这时，激励 $\boldsymbol{f}(t)$ 在相应虚位移上所做的功可表示为

$$\delta W = \delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t) = \delta\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t)$$

于是，在模态坐标系中，广义激励 $\boldsymbol{Q}$ 可表示为

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t)$$

因此，模态激振力也称广义力。再注意到，关于对称二次型 $V \equiv \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的导数可表示为

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$

将上述模态坐标系中的 $E_{\mathrm{k}}$、$E_{\mathrm{p}}$ 与 $Q$ 的表达式代入拉格朗日方程，即得方程(5.3.11$a$)。

**例 5.3.1**　图 5.3.1 所示 2 自由度系统中，设 $m=1, c_1=c_2=0, k=100$。试求系统的固有频率与主振型。

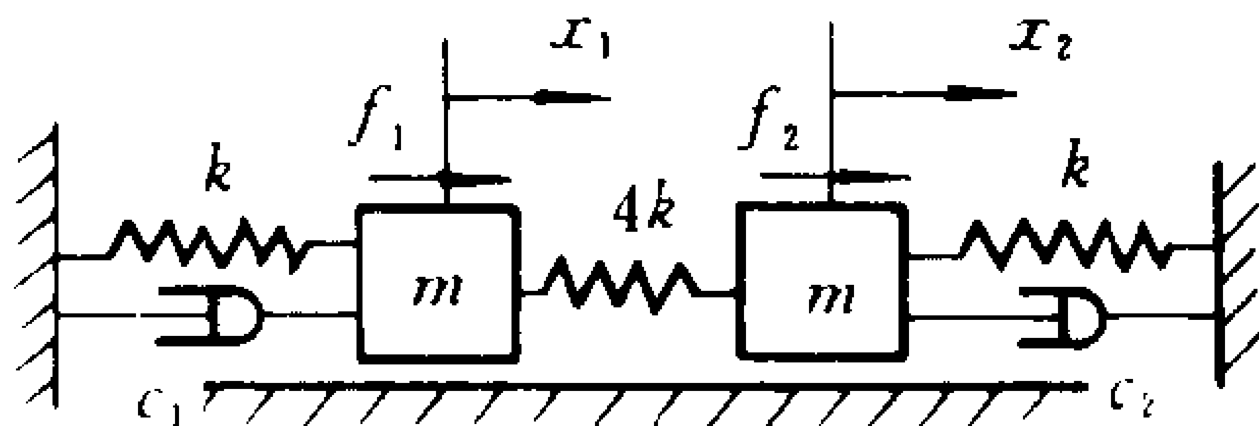



图 5.3.1　2 自由度系统

**解**　系统的自由运动微分方程为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 500 & -400 \\ -400 & 500 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (a)$$

其中 $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2]^{\mathrm{T}}$。设系统的主振动为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\cos pt$$

由此得主振型方程为

$$\begin{bmatrix} -p^2+500 & -400 \\ -400 & -p^2+500 \end{bmatrix} \boldsymbol{X} = \mathbf{0}$$

由特征方程

$$(p^2-500)^2-(400)^2=0$$

可得

$$p_1^2=100, \quad p_2^2=900$$

故系统的两个固有频率分别为

$$p_1=10\ \text{rad/s}, \quad p_2=30\ \text{rad/s}$$

由主振型方程,可分别解得两个主振型如下:

$$\boldsymbol{X}_1=[1\quad 1]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{X}_2=[1\quad -1]^{\mathrm{T}}$$

它们可示意为图 5.3.2 所示。

图 5.3.2 主振型示意图

这时,如对应于 $p_1$ 与 $p_2$ 的主振动分别记为 $x_{(1)}$ 与 $x_{(2)}$,则有

$$\boldsymbol{x}_{(1)}=\boldsymbol{X}_1\cos p_1 t \equiv \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{(2)}=\boldsymbol{X}_2\cos p_2 t \equiv \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

如果分别用两个旋转矢量的投影来表示各个主振动的两个运动分量,则可以各得到一组共线的矢量,如图 5.3.3 所示。图中两组矢量分别以角速度 $p_1$ 与 $p_2$ 绕 $O$ 点作匀速转动。由于矢量共线,所对应的两个运动分量将同时通过零点,并同时达到极值。

图 5.3.3　主振动的旋转矢量表示

**例 5.3.2**　在上例的 2 自由度系统中,设初始条件给定为:当 $t=0$ 时,有

$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\equiv\begin{bmatrix}x_{10}\\x_{20}\end{bmatrix},\quad \dot{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}_0'\equiv\begin{bmatrix}x_{10}'\\x_{20}'\end{bmatrix}$$

试求对应于上述初始条件的系统自由振动。

**解**　由上例结果,系统的实模态矩阵可取为

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{X}_1\quad \boldsymbol{X}_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

记 $\boldsymbol{y}\equiv[y_1\quad y_2]^{\mathrm{T}}$,引入实模态变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

方程($a$)可化为已解耦的模态运动微分方程

$$\ddot{\boldsymbol{y}}+\begin{bmatrix}p_1^2 & 0\\0 & p_2^2\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$$

相应地,初始条件将化为:当 $t=0$ 时,有

$$\boldsymbol{y}(0)\equiv\begin{bmatrix}y_{10}\\y_{20}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}_0=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x_{10}+x_{20}\\x_{10}-x_{20}\end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{y}}(0)\equiv\begin{bmatrix}y_{10}'\\y_{20}'\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}_0=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x_{10}'+x_{20}'\\x_{10}'-x_{20}'\end{bmatrix}$$

对应于这一初始条件的模态响应可求得为

$$y_i=y_{i0}\cos p_it+\frac{y_{i0}'}{p_i}\sin p_it,\quad i=1,2$$

因此,系统的自由振动可表示为

$$x = Ay = [X_1 \quad X_2]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = X_1 y_1 + X_2 y_2$$

不难看出，对应于任意给定的初始条件，系统的自由振动是主振动的线性组合。

当且仅当 $x(0) = X_1 a$，$\dot{x}(0) = X_1 b$，其中 $a$ 与 $b$ 为任意常数，即当 $x_{10} = x_{20} = a$，$x_{10}' = x_{20}' = b$ 时，有 $y_{10} = a$，$y_{10}' = b$，$y_{20} = y_{20}' = 0$。这时，有

$$y_1 = a\cos p_1 t + \frac{b}{p_1}\sin p_1 t$$

$$y_2 = 0$$

从而有

$$x = X_1 y_1 = X_1\left\{a\cos p_1 t + \frac{b}{p_1}\sin p_1 t\right\}$$

只有在这时，系统的自由振动与一阶主振动取相同的形式。

又当且仅当 $x(0) = X_2 a$，$\dot{x}(0) = X_2 b$ 时，即当 $x_{10} = -x_{20}$，$x_{10}' = -x_{20}'$ 时，有 $y_{10} = y_{10}' = 0$，$y_{20} = a$，$y_{20}' = b$。这时，有

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = a\cos p_2 t + \frac{b}{p_2}\sin p_2 t$$

从而有

$$x = X_2 y_2 = X_2\left\{a\cos p_2 t + \frac{b}{p_2}\sin p_2 t\right\}$$

只有在这时，系统的自由振动与二阶主振动才取相同的形式。

**例 5.3.3** 图 5.3.1 所示 2 自由度系统中，设 $m = 1$，$c_1 = c_2 = 0$，$k = 100$，沿 $x$ 的正向，仅在左质量上作用一个在 $t = 0$ 瞬时产生单位冲量的力 $f_1 = \delta(t)$。试求在零初始条件下系统的响应；并进一步求系统的脉冲响应矩阵。

**解** 系统的受迫振动微分方程为

$$\ddot{x} + \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} 100x = \begin{bmatrix} \delta(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{b}$$

由上例的结果，系统的实模态矩阵可取为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

引用实模态变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

方程($b$) 可化为

$$\ddot{\boldsymbol{y}}+\begin{bmatrix}p_1^2 & 0\\ 0 & p_2^2\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\delta(t)$$

记零初始条件下的模态响应为 $y_{(1)}$，则有

$$\boldsymbol{y}_{(1)}=\begin{bmatrix}y_{11}\\ y_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2p_1}\sin p_1 t\\ \dfrac{1}{2p_2}\sin p_2 t\end{bmatrix} \tag{c}$$

返回到变量 $x$，记相应的响应列阵为 $\boldsymbol{h}_1$，则有

$$\boldsymbol{h}_1=\boldsymbol{A}y_{(1)}=[y_{11}+y_{21} \quad y_{11}-y_{21}]^{\mathrm{T}} \tag{d}$$

式($c$) 所示 $\boldsymbol{y}_{(1)}$ 代表在左质量上作用有单位冲量时，所对应的模态脉冲响应列阵；而式($d$) 所示 $\boldsymbol{h}_1$ 则代表系统的脉冲响应列阵。

读者可自行推导，当仅在右质量上作用一单位冲量 $f_2=\delta(t)$ 时，记相应的模态脉冲响应列阵为 $\boldsymbol{y}_{(2)}$，则有

$$\boldsymbol{y}_{(2)}=\begin{bmatrix}y_{12}\\ y_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2p_1}\sin p_1 t\\ -\dfrac{1}{2p_2}\sin p_2 t\end{bmatrix} \tag{e}$$

而相应的系统脉冲响应列阵记为 $\boldsymbol{h}_2$，则有

$$\boldsymbol{h}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_{(2)}=[y_{12}+y_{22} \quad y_{12}-y_{22}]^{\mathrm{T}} \tag{f}$$

如果将系统左、右质量上的外激看做系统的双输入，而将系统的模态响应或位移响应看做双输出；那么上述系统就是一个双输入／双输出系统。这时，综合式($c$) ～ ($f$)，系统的模态脉冲响应矩阵 $\boldsymbol{g}(t)$ 可表示为

$$\boldsymbol{g}(t)=[y_{(1)}\quad y_{(2)}]=\begin{bmatrix}y_{11} & y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{bmatrix},\quad t>0 \tag{g}$$

而系统的脉冲响应矩阵 $\boldsymbol{h}(t)$，则可表示为

$$\boldsymbol{h}(t)=[\mathbf{h}_1\quad \mathbf{h}_2]=\boldsymbol{Ag}(t)=\begin{bmatrix}y_{11}+y_{21} & y_{12}+y_{22}\\ y_{11}-y_{21} & y_{12}-y_{22}\end{bmatrix},\ t>0 \tag{h}$$

以上仅就 2 自由度系统说明了求系统脉冲响应矩阵的方法，这一方法同样也适用于具有更多自由度的系统。

**例 5.3.4** 设在上例的 2 自由度系统中，在左、右质量上分别作用有 $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$，如图 5.3.4 所示。试求系统在零初始条件下的响应。

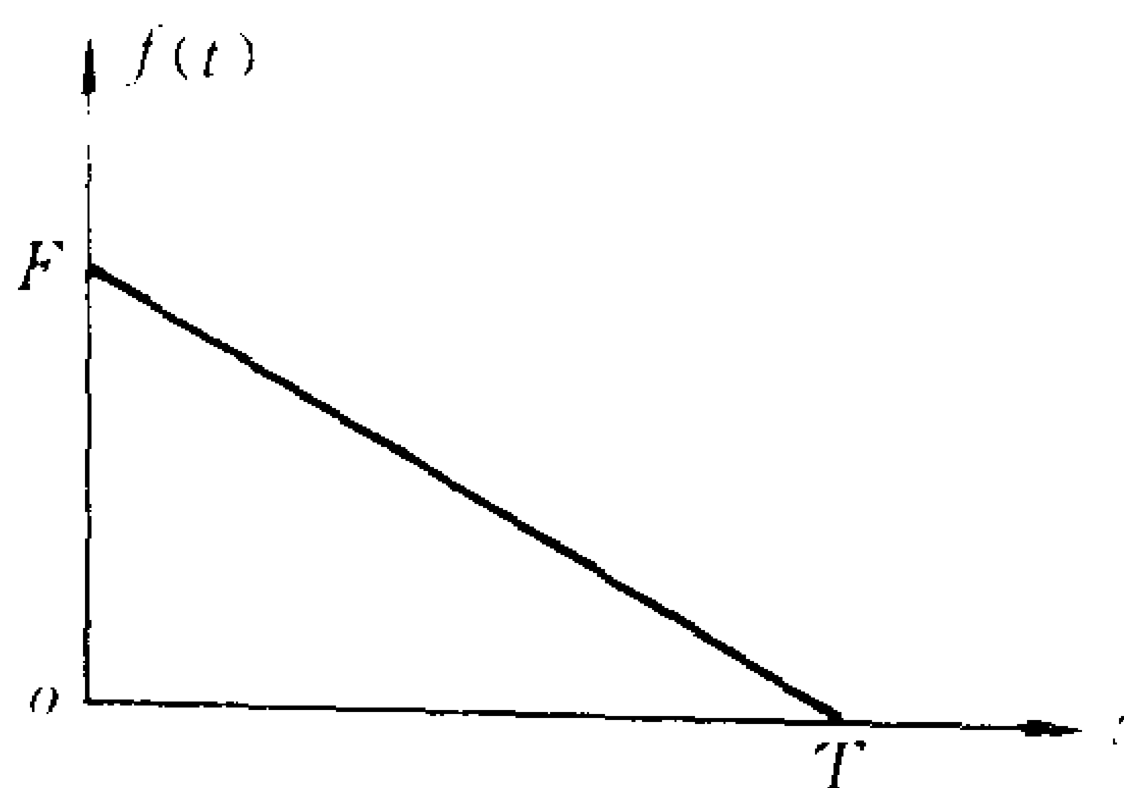



图 5.3.4 三角形脉冲激励

**解** 按图 5.3.4，$f(t)$ 可表示为

$$f(t)=\begin{cases}F\left(1-\dfrac{t}{T}\right), & 0<t\leqslant T\\ 0\ , & t>T\end{cases}$$

这时，系统的运动微分方程可表示为

$$\ddot{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}5 & -4\\ -4 & 5\end{bmatrix}100\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}f(t) \tag{i}$$

由例5.3.2和例5.3.3可知，借实模态变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，上式可化为解耦的模态运动微分方程

$$\left.\begin{aligned}\ddot{y}_1+p_1^2y_1&=f(t)\\ \ddot{y}_2+p_2^2y_2&=0\end{aligned}\right\}\qquad(j)$$

容易看到，当原系统$(i)$具有零初始条件时，相应的模态系统也具有零初始条件。这时，参照4.4节，从方程$(j)$可解得

$$y_1=\frac{1}{p_1}\int_0^t\sin p_1(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=\begin{cases}\dfrac{F}{p_1^2}\left(1-\dfrac{t}{T}-\cos p_1t+\dfrac{\sin p_1t}{p_1T}\right), & 0<t\leqslant T\\ \dfrac{F}{p_1^2}\left[-\cos p_1t+\dfrac{\sin p_1t-\sin p_1(t-\tau)}{p_1T}\right], & t>T\end{cases}$$

$$y_2=0$$

因此，对于原系统来说，就有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{X}_1\quad\boldsymbol{X}_2]\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{X}_1y_1$$

这一结果并非偶然，因为在零初始条件下，外激励列阵与系统的一阶主振型成比例，所以它仅能激发系统的一阶模态振动。

再设在系统左、右质量上作用有 $f_1(t)=-f_2(t)=f(t)$，则结果将有

$$\left.\begin{aligned}\ddot{y}_1+p_1^2y_1&=0\\ \ddot{y}_2+p_2^2y_2&=f(t)\end{aligned}\right\}$$

从而有

$$y_1=0$$

$$y_2=\begin{cases}\dfrac{F}{p_2^2}\left(1-\dfrac{t}{T}-\cos p_2t+\dfrac{\sin p_2t}{p_2T}\right), & 0<t\leqslant T\\ \dfrac{F}{p_2^2}\left[-\cos p_2t+\dfrac{\sin p_2t-\sin p_2(t-T)}{p_2T}\right], & t>T\end{cases}$$

最后有

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}_2 y_2$$

读者试自行推导这一结果，并作出相应的物理解释。

**例 5.3.5** 仍取上例中的 2 自由度系统，假设仅在左质量上作用有谐和扰力，即有 $f_1 = F\sin pt$，$f_2 = 0$。试求在零初始条件下系统的响应。

**解** 这时，系统的运动微分方程为

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} 100\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} F\sin pt \\ 0 \end{bmatrix}$$

仍取上例中的实模态变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，原系统可化为如下的模态系统

$$\ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 \\ 0 & p_2^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} F\sin pt$$

当 $p \neq p_1$，$p_2$ 时，对应于零初始条件，模态响应可求得为

$$y_1 = \frac{F}{2(p_1^2 - p^2)}\left[-\frac{p}{p_1}\sin p_1 t + \sin pt\right] \tag{k}$$

$$y_2 = \frac{F}{2(p_2^2 - p^2)}\left[-\frac{p}{p_2}\sin p_2 t + \sin pt\right] \tag{l}$$

返回到原系统，响应 $x$ 可表示为

$$\boldsymbol{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

由此得

$$x_1 = \frac{F}{2}\left[-\frac{p}{p_1(p_1^2 - p^2)}\sin p_1 t - \frac{p}{p_2(p_2^2 - p^2)}\sin p_2 t + \frac{p_1^2 + p_2^2 - 2p^2}{(p_1^2 p^2)(p_2^2 - p^2)}\sin pt\right] \tag{m}$$

$$x_2 = \frac{F}{2}\left[-\frac{p}{p_1(p_1^2 - p^2)}\sin p_1 t + \frac{p}{p_2(p_2^2 - p^2)}\sin p_2 t + \frac{p_2^2 - p_1^2}{(p_1^2 - p^2)(p_2^2 - p^2)}\sin pt\right] \tag{n}$$

式 $(m)$ 与 $(n)$ 中，右端前两项代表扰力激起的自由振动，最后一项则代表扰力激起的强迫振动。

从式$(m)$可以看到，当 $p^2=(p_1^2+p_2^2)/2$ 时，$x_1$ 中的强迫振动项等于零。注意，这时的扰力频率 $p=10\sqrt{5}\ \mathrm{rad/s}\equiv p_a$，它正好等于图 5.3.1 中右侧子系统的固有频率，见图 5.3.5。从强迫振动的角度来看，这时，左质量的强迫振动已被右侧子系统所吸收。这一效应通常称为动力吸振效应，$p_a$ 称为吸振频率，而调谐到吸振频率的子系统称为动力吸振器。

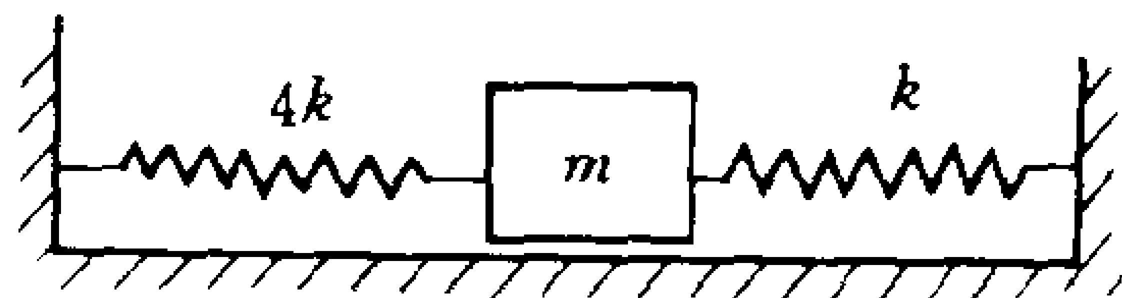


图 5.3.5　右侧子系统

当 $p=p_1$ 或 $p=p_2$ 时，系统将发生共振。例如当 $p=p_1$ 时，$y_1$ 将不再具有式$(k)$形式的解，而应取代为

$$y_1=\frac{F}{4p_1^2}(\sin p_1t-p_1t\cos p_1t)$$

令

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+(p_1t)^2}},\quad \sin\alpha=\frac{p_1t}{\sqrt{1+(p_1t)^2}}$$

上式可化为

$$y_1=\frac{F}{4p_1^2}\sqrt{1+(p_1t)^2}\sin(p_1t-\alpha)$$

当 $p_1t\gg1$ 时，近似地有

$$y_1\approx\frac{Ft}{4p_1}\sin(p_1t-\alpha)$$

当 $p_1t\to\infty$ 时，有 $\alpha=\frac{\pi}{2}$。从以上讨论可知，当系统进入共振时，响应振幅将随时间推移而线性地增长，并趋于无穷大；响应相位将滞后于激励相位，并渐趋于相差$\frac{\pi}{2}$。

### 5.3.2 经典阻尼情形

再来看经典阻尼的情形。设线性阻尼系统的运动微分方程可表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t) \tag{5.3.13}$$

它与方程(5.3.1)相比，只是增加了一个线性阻尼项$\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}$，其中$\boldsymbol{C}$是阻尼矩阵。

能否利用上述实模态变换来使系统(5.3.13)解耦，关键在于阻尼矩阵$\boldsymbol{C}$在上述实模态变换下能否化为对角阵。如果能有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}[C_i] = \mathrm{diag}[2M_i\zeta_i p_i]$$

那么系统(5.3.13)就可化为

$$\ddot{\boldsymbol{y}} + \mathrm{diag}[2\zeta_i p_i]\dot{\boldsymbol{y}} + \mathrm{diag}[p_i^2]\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t) \tag{5.3.14}$$

于是，系统(5.3.13)已解耦成功。从而上述线性阻尼系统的响应问题就可转化为$n$个独立的阻尼谐振子的响应问题。

可以证明：阻尼矩阵$\boldsymbol{C}$可借实模态变换化为对角阵的充要条件为①

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} \tag{5.3.15}$$

与之等价的条件(假设$\boldsymbol{K}$与$\boldsymbol{C}$正定)为

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M} \quad 或 \quad \boldsymbol{M}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{M}$$

满足条件式(5.3.15)或其等价条件的阻尼，称为经典阻尼。而文献中常提到的所谓比例阻尼定义为

$$\boldsymbol{C} = \alpha\boldsymbol{M} + \beta\boldsymbol{K}, \quad \alpha,\beta\ 为实常数$$

它是经典阻尼的一种特例。

总而言之，凡是无阻尼的或具有经典阻尼的$n$自由度线性系统总可以通过实模态分析，将系统的响应问题化为$n$个独立的1自由度系统的模态响应问题，从而使问题大为简化。

---

① 季文美，方同，陈松淇．机械振动．北京：科学出版社，1985．665～667

**例 5.3.6**　图 5.3.1 所示 2 自由度系统中，设 $m = 1$，$c_1 = c_2 = 6$，$k = 100$，且在左质量上作用有 $f_1 = \delta(t)$。试求在零初始条件下，系统对应于输入 $f_1$ 的脉冲响应列阵。

**解**　这时，系统的运动微分方程为

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} 100\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t)$$

其中 $\boldsymbol{C} = 6\boldsymbol{I}$。注意，系统的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为单位阵 $\boldsymbol{I}$，而阻尼矩阵 $\boldsymbol{C} = 6\boldsymbol{I} = 6\boldsymbol{M}$，故它属于经典阻尼情形。仍可利用例 5.3.1 ~ 5.3.5 中的实模态变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 将原系统化为如下模态运动系统

$$\ddot{\boldsymbol{y}} + 6\dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 \\ 0 & p_2^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t)$$

这时，系统的特征值可求得为

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = -3 + \mathrm{j}9.539$$

$$\lambda_3 = \bar{\lambda}_4 = -3 + \mathrm{j}29.985$$

对应于零初始条件，模态脉冲响应列阵 $\boldsymbol{y}_{(1)}$ 可表示为

$$\boldsymbol{y}_{(1)} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.052\,4\,\mathrm{e}^{-3t}\sin 9.539t \\ 0.016\,7\,\mathrm{e}^{-3t}\sin 29.985t \end{bmatrix}$$

返回到原系统，对应于输入 $f_1$ 的脉冲响应列阵可表示为

$$\boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_{(1)} = \begin{bmatrix} y_{11} + y_{21} \\ y_{11} - y_{21} \end{bmatrix}$$

建议读者进一步求出系统对应于输入 $f_2$ 的脉冲响应列阵 $\boldsymbol{h}_2$，并由 $\boldsymbol{h}_1$ 与 $\boldsymbol{h}_2$ 构成系统对应于双输入的脉冲响应矩阵。

**例 5.3.7**　在上例的 2 自由度系统中，设在左质量上作用有复谐和扰力 $f_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$。试求系统的定常强迫振动；并进一步求出系统的频率响应矩阵。

**解**　这时，系统的运动微分方程为

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} 500\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{o}$$

仍利用上例中的实模态变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$,可将原系统化为如下模态运动微分方程

$$\ddot{\boldsymbol{y}} + 6\dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 \\ 0 & p_2^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{j\omega t}$$

对应于复谐和激励,定常模态响应可设为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}_1 e^{j\omega t}$$

其中 $\boldsymbol{Y}_1 \equiv [Y_{11} \quad Y_{21}]^T$ 为待定的复振幅列阵。将它们代入模态运动微分方程,可得

$$\Delta_i Y_{i1} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2$$

其中

$$\Delta_i \equiv -\omega^2 + 6j\omega + p_i^2, \quad i = 1, 2$$

于是有

$$Y_{i1} = (2\Delta_i)^{-1}, \quad i = 1, 2$$

注意,系统的频率响应函数定义为系统的定常复谐和响应与输入 $e^{j\omega t}$ 之比,因而 $\boldsymbol{Y}_1$ 代表对应于复谐和输入 $f_1$ 的系统模态频率响应列阵。

返回到原系统,对应于输入 $f_1$ 的系统频率响应列阵 $H_1$ 表示为

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_1 = \begin{bmatrix} Y_{11} + Y_{21} \\ Y_{11} - Y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\omega^2 + 6j\omega + 500}{\Delta_1\Delta_2} \\ \dfrac{400}{\Delta_1\Delta_2} \end{bmatrix}$$

读者可自行推导,对应于复谐和输入 $f_2 = e^{j\omega t}$ 的系统模态频率响应列阵为

$$\boldsymbol{Y}_2 = \begin{bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ -Y_{21} \end{bmatrix}$$

相应地有

$$\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_2 = \begin{bmatrix} Y_{11} - Y_{21} \\ Y_{11} + Y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{400}{\Delta_1\Delta_2} \\ \dfrac{-\omega^2 + 6\mathrm{j}\omega + 500}{\Delta_1\Delta_2} \end{bmatrix}$$

这样，对应于复谐和双输入，系统的频率响应矩阵可表示为

$$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{H}_1 \quad \boldsymbol{H}_2]$$

**例 5.3.8**　直接求解上例系统的频率响应矩阵。

**解**　上例通过模态分析，导出了系统的频率响应矩阵。其实，它也可以从原始系统直接导出。

对应于 $f_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，$f_2 = 0$ 的情形，系统的定常复谐和响应可设为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{H}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}, \quad \boldsymbol{H}_1 \equiv [X_{11} \quad X_{12}]^{\mathrm{T}}$$

将它们代入原始方程($o$)，有

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + 6\mathrm{j}\omega + 500 & -400 \\ -400 & -\omega^2 + 6\mathrm{j}\omega + 500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此可解得

$$\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\omega^2 + 6\mathrm{j}\omega + 500}{\Delta_1\Delta_2} \\ \dfrac{400}{\Delta_1\Delta_2} \end{bmatrix}$$

对应于 $f_1 = 0$，$f_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 的情形，原系统的运动微分方程为

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} 100\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{$p$}$$

这时，系统的定常复谐和响应可设为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{H}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}, \quad \boldsymbol{H}_2 \equiv [X_{12} \quad X_{22}]^{\mathrm{T}}$$

将它们代入方程($p$)，有

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + 6\mathrm{j}\omega + 500 & -400 \\ -400 & -\omega^2 + 6\mathrm{j}\omega + 500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由此可解得

$$\boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix}X_{12}\\X_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{400}{\Delta_1\Delta_2}\\[2ex]\dfrac{-\omega^2+6\mathrm{j}\omega+500}{\Delta_1\Delta_2}\end{bmatrix}$$

因此，系统的频率响应矩阵可表示为

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{H}_1\quad\boldsymbol{H}_2]$$

这与例 5.3.7 中的结果完全一致。

对于高阶系统来说，直接方法涉及高阶矩阵求逆，而且对于每个 $\omega$ 都得重复这一计算过程，工作量相对较大。

# 5.4 复模态分析

## 5.4.1 对称系统

现在来考察非经典阻尼情形。一般的 $n$ 自由度线性阻尼系统的运动微分方程总可以表示为

$$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t) \tag{5.4.1}$$

式中 $\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为系统的质量、阻尼、刚度矩阵，暂时假设它们都是 $n\times n$ 阶实对称阵，且 $\boldsymbol{m}$ 为正定的，$\boldsymbol{c}$ 不满足可对角化条件(5.3.15)；$x$ 是位移列阵；$\boldsymbol{f}(t)$ 是激励列阵。

对应于系统的自由运动，有

$$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{5.4.2}$$

这时，系统的自由运动可设为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}+\overline{\boldsymbol{X}} \tag{5.4.3}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 可表示为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{5.4.4}$$

式中 $\boldsymbol{u}$ 与 $\lambda$ 均为待定的量。将上述 $\boldsymbol{x}$ 代入方程(5.4.2)，可得

$$[\lambda^2 \boldsymbol{m} + \lambda \boldsymbol{c} + \boldsymbol{k}]\boldsymbol{u} + [\bar{\lambda}^2 \boldsymbol{m} + \bar{\lambda} \boldsymbol{c} + \boldsymbol{k}]\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \tag{5.4.5}$$

上式左端第一项为对应于 $\boldsymbol{X}$ 所得的结果，如果这一项等于零，即

$$[\lambda^2 \boldsymbol{m} + \lambda \boldsymbol{c} + \boldsymbol{k}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{5.4.6}$$

则式(5.4.5)自然满足，因而，只需考察上式就可以了。$X$ 常称为方程(5.4.2)的特征解，$\lambda$ 与 $\boldsymbol{u}$ 分别为待定的特征值与特征矢量。方程(5.4.6)有非零解的充要条件是

$$|\lambda^2 \boldsymbol{m} + \lambda \boldsymbol{c} + \boldsymbol{k}| = 0 \tag{5.4.7}$$

这就是线性阻尼系统的特征方程。由此可确定 $2n$ 个特征值 $\lambda_r$，$r = 1, \cdots, 2n$。和无阻尼情形不同，这时的 $\lambda_r$ 可以是实的，也可以是复的。当阻尼矩阵正定时，所有特征值都具有负实部，对应于系统衰减的固有运动。当阻尼属于亚临界情形时，所有特征值都是复的，且共轭成对地出现。而每一对共轭复特征值对应于系统中一个具有特定频率与减幅率的衰减固有振动。

对应于任意一个特征值 $\lambda_r$，记与之相应的特征矢量为 $\boldsymbol{u}_r$，将它们代入方程(5.4.6)，可得

$$[\lambda_r^2 \boldsymbol{m} + \lambda_r \boldsymbol{c} + \boldsymbol{k}]\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}, \quad r = 1, \cdots, 2n \tag{5.4.8}$$

由此，在不计任意复数倍差别的意义下，对应于每个 $\lambda_r$，可确定一个复特征矢量 $\boldsymbol{u}_r$，称为**复模态**或**复主振型**。

当系统的各个特征值都不相同时，系统的 $2n$ 个特征解可表示为

$$\boldsymbol{X}_r = \boldsymbol{u}_r \mathrm{e}^{\lambda_r t}, \quad r = 1, \cdots, 2n$$

由系统的 $2n$ 个复特征矢量 $\boldsymbol{u}_r$，可构成一个 $n \times 2n$ 阶复模态矩阵 $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{u}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_{2n}]_{n \times 2n}$$

可是我们不能用它来直接对系统(5.4.1)进行解耦，因为对于 $\boldsymbol{u}$，不存在像实模态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 那样的关于 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 的加权正交性。这个困难可以解决如下：

引入状态变量 $\boldsymbol{y}$，将方程(5.4.1)改写成

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(t) \tag{5.4.9}$$

其中

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\\boldsymbol{x}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{f}(t)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{m}\\\boldsymbol{m}&\boldsymbol{c}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{m}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{k}\end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{k}$ 都是对称矩阵的假设，不难看到，这时 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 也是对称阵。

考察系统(5.4.9)的自由运动时，有

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0} \tag{5.4.10}$$

考虑到，方程(5.4.10)与(5.4.2)描述的是同一个系统的自由运动，所以它们应有同样的特征值与相当的特征解，即方程(5.4.10)的特征解 $\boldsymbol{Y}_r$ 可表示为

$$\boldsymbol{Y}_r=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{X}}_r\\\boldsymbol{X}_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_r\boldsymbol{u}_r\\\boldsymbol{u}_r\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_r t}$$

所以，系统(5.4.10)中与特征值 $\lambda_r$ 对应的特征矢量 $\boldsymbol{U}_r$ 可表示为

$$\boldsymbol{U}_r=\begin{bmatrix}\lambda_r\boldsymbol{u}_r\\\boldsymbol{u}_r\end{bmatrix}$$

不难证明，(5.4.10)的特征矢量 $\boldsymbol{U}_r$ 具有关于 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 的加权正交性。即当 $r\neq s$ 时，有

$$\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_r=0,\quad \boldsymbol{U}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_r=0$$

事实上，由方程(5.4.10)，对应于 $\lambda_r$ 与 $\lambda_s$，分别有

$$\lambda_r\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_r+\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_r=\boldsymbol{0}$$

$$\lambda_s\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_s+\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_s=\boldsymbol{0}$$

对上列第一代前乘以 $\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{T}}$；将第二式转置后，再后乘以 $\boldsymbol{U}_r$；分别得

$$\begin{aligned}\lambda_r\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_r+\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_r&=0\\\lambda_s\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_r+\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_r&=0\end{aligned} \tag{5.4.11}$$

上列两式相减，可得

$$(\lambda_r - \lambda_s)\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_r = 0 \tag{5.4.12}$$

可见，当 $r \neq s$ 时，由于 $\lambda_r \neq \lambda_s$，故有

$$\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_r = 0, \quad r \neq s$$

由式(5.4.11)，随之可得

$$\boldsymbol{U}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_r = 0, \quad r \neq s$$

系统(5.4.10)的复特征矢量关于 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 的加权正交性由此得证。

当 $s = r$ 时，不论 $\boldsymbol{U}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_s$ 取何有限值，式(5.4.12)恒满足。故可以记

$$\boldsymbol{U}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_r = m_r, \quad \boldsymbol{U}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_r = k_r$$

由式(5.4.11)，可知有

$$k_r = -\lambda_r m_r$$

$m_r$ 与 $k_r$ 分别称为第 $r$ 个模态质量参数与模态刚度参数，它们一般为复数，而且对于共轭的特征矢量，相应的参数也是共轭的。由 $\boldsymbol{U}_r$ 与 $\boldsymbol{M}$ 的定义，不难推得

$$m_r = \boldsymbol{u}_r^{\mathrm{T}}[2\lambda_r\boldsymbol{m} + \boldsymbol{c}]\boldsymbol{u}_r \tag{5.4.13}$$

由 $2n$ 个 $\boldsymbol{U}_r$，可以构作系统(5.4.10)的 $2n \times 2n$ 阶复模态矩阵 $\boldsymbol{U}$

$$\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{U}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{U}_{2n}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u\lambda} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}$ 为系统的特征值矩阵，其为

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{diag}[\lambda_r], \quad r = 1, \cdots, 2n$$

根据上述复特征矢量的正交性，借助于如下复模态变换

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{z} \tag{5.4.14}$$

其中 $\boldsymbol{z}$ 为复模态响应列阵，其为

$$\boldsymbol{z} = [z_1 \quad \cdots \quad z_{2n}]^{\mathrm{T}}$$

可以对系统(5.4.9)进行解耦。对式(5.4.9)前乘以 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$，可得

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)$$

即有

$$\mathrm{diag}[m_r]\dot{z} + \mathrm{diag}[k_r]z = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t)$$

或写成

$$\dot{z} - \lambda z = \mathrm{diag}[m_r^{-1}]\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t) \tag{5.4.15}$$

或写成标量形式，有

$$\dot{z}_r - \lambda_r z_r = m_r^{-1}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t), \quad r = 1, \cdots, 2n \tag{5.4.16}$$

这样，借助于状态变量表示以及复模态变换(5.4.14)，系统(5.4.9)最终可转化为 $2n$ 个已解耦的一阶复模态响应方程(5.4.16)。也就是说，非经典阻尼情形下的 $n$ 自由度线性系统的响应问题，总可以通过复模态分析，转化为 $2n$ 个独立的一阶系统的复模态响应问题，而后者的求解显然要简单得多。

**例 5.4.1** 图 5.3.1 所示 2 自由度系统中，设 $m = 1$，$c_1 = 3$，$c_2 = 9$，$k = 100$；且有 $f_1 = \delta(t)$，$f_2 = 0$。试求在零初始条件下，系统对应于输入 $f_1$ 的脉冲响应列阵。

**解** 这时，系统的运动微分方程可写为

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}100\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \delta(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

注意，此时利用实模态变换 $\boldsymbol{A}$ 已无法使阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$ 对角化，因为有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$$

所以，只能采用复模态分析。由特征方程

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 3\lambda + 500 & -400 \\ -400 & \lambda^2 + 9\lambda + 500 \end{vmatrix} = 0$$

可求得系统的复特征值为

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_3 \equiv a_1 + \mathrm{j}b_1 = -3.034\,2 + \mathrm{j}9.588\,1$$

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_4 \equiv a_2 + \mathrm{j}b_2 = -2.965\,8 + \mathrm{j}29.682\,8$$

与之相应的复特征矢量可求得为

$$\boldsymbol{u}_1 = \bar{\boldsymbol{u}}_3 = \begin{bmatrix} 0.883\,37 - \mathrm{j}0.531\,45 \\ 0.862\,33 - \mathrm{j}0.607\,28 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \bar{\boldsymbol{u}}_4 = \begin{bmatrix} 0.132\ 29 + \mathrm{j}0.695\ 53 \\ 0.025\ 25 - \mathrm{j}0.691\ 57 \end{bmatrix}$$

上述复特征矢量可示意为图 5.4.1 所示。

图 5.4.1　复特征矢量示意图

利用如下复模态变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{z} \equiv [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4][z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4]^{\mathrm{T}}$$

最终可归结为如下复模态运动微分方程

$$\dot{\boldsymbol{z}} - \mathrm{diag}[\lambda_i]\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}(t)$$

其中

$$\boldsymbol{F}(t) = \mathrm{diag}[m_i^{-1}]\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}[\delta(t) \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{u_{11}}{m_1} & \dfrac{u_{12}}{m_2} & \dfrac{u_{13}}{m_3} & \dfrac{u_{14}}{m_4} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \delta(t)$$

且有

$$m_1 = \overline{m}_3 = 37.660\ 3 + \mathrm{j}16.546\ 7$$

$$m_2 = \overline{m}_4 = -8.950\ 1 - \mathrm{j}56.681\ 0$$

在零初始条件下，系统的复模态响应可求得为

$$z_i = \left(\frac{u_{1i}}{m_i}\right)\mathrm{e}^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \cdots, 4$$

或写成

$$z_1 = \bar{z}_3 = 0.025\ 06\mathrm{e}^{(\lambda_1 t - \mathrm{j}0.955\ 8)}$$

$$z_2 = \bar{z}_4 = 0.012\ 34\mathrm{e}^{(\lambda_2 t - \mathrm{j}0.031\ 36)}$$

返回到原系统，有

$$x = uz = \sum_{i=1}^{4} u_i z_i$$

$$= 2\{\mathrm{Re}(u_1 z_2) + \mathrm{Re}(u_2 z_2)\} \equiv \begin{bmatrix} x_{11} + x_{12} \\ x_{21} + x_{22} \end{bmatrix}$$

其中

$$x_{11} = 0.051\ 67 e^{a_1 t} \cos(b_1 t - 1.497\ 2)$$

$$x_{21} = 0.052\ 87 e^{a_1 t} \cos(b_1 t - 1.569\ 1)$$

$$x_{12} = 0.017\ 60 e^{a_2 t} \cos(b_2 t - 1.351\ 5)$$

$$x_{22} = 0.017\ 08 e^{a_2 t} \cos(b_2 t - 1.565\ 5)$$

这时，在物理坐标系中，对应于 $\lambda_1$ 与 $\lambda_2$ 的主振动可分别表示为

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}, \qquad x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

如果分别用两个旋转矢量的投影来表示物理坐标系中每个主振动的两个运动分量，那末这时两个旋转矢量已不再共线，如图 5.4.2 所示。在一阶主振动中，$x_{21}$ 较 $x_{11}$ 滞后约 4°；在二阶主振动中，$x_{22}$ 较 $x_{12}$ 滞后约 167°。

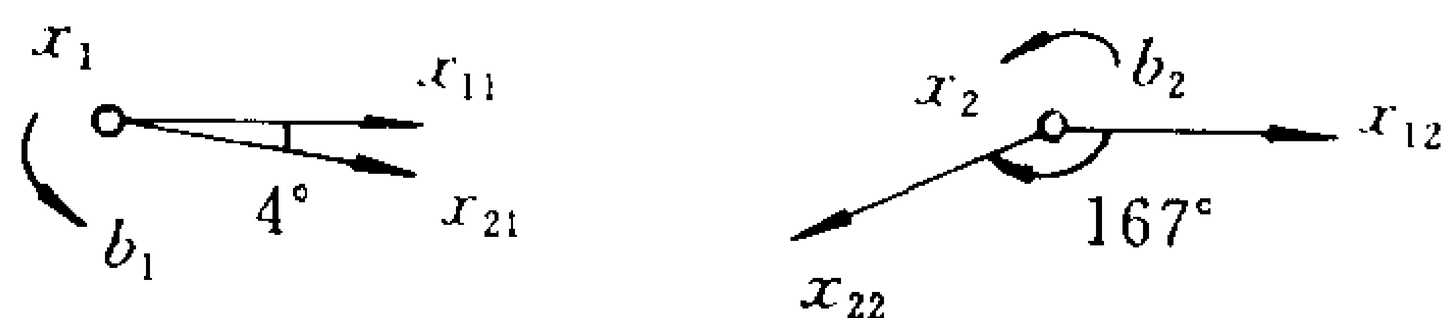



图 5.4.2 主振动的旋转矢量表示

比较图 5.3.3 与图 5.4.2，可以看到实模态分析与复模态分析中两类主振动之间的差别。如图 5.4.2 所示，对应于复模态的各阶主振动中，由于各个分量所对应的旋转矢量不再共线，所以它们不再同时通过零值，也不再同时达到极值。

### 5.4.2　非对称系统

现在来考察系统的质量、阻尼与刚度矩阵不是对称阵的情形。当考察有流固耦合作用或有陀螺效应的系统的振动时，就会遇到这种情形。这时，由于系统的不对称性，原系统及其转置系统不再等同，两者所对应的复模态也有所不同，故需对模态矩阵与模态变换作适当补充与修改，但复模态分析原理仍然适用。设系统的运动微分方程仍取式(5.4.1)的形式

$$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t) \tag{5.4.17}$$

只是其中的 $\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{k}$ 不再是对称阵。设相应的状态变量运动微分方程仍取式(5.4.9)的形式

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{F}(t) \tag{5.4.18}$$

只是其中的 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 也不再是对称阵。这时，由方程

$$[\lambda_r\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}]\boldsymbol{U}_r=\boldsymbol{0} \tag{5.4.19}$$

确定的复特征矢量 $\boldsymbol{U}_r$ 称为系统的**右特征矢量**。相应地，由各个 $\boldsymbol{U}_r$ 组成的矩阵

$$\boldsymbol{U}\equiv[\boldsymbol{U}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{U}_{2n}]_{2n\times 2n}$$

称为系统的右模态矩阵。对如下方程

$$\boldsymbol{V}_s^{\mathrm{T}}[\lambda_s\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}]=\boldsymbol{0} \tag{5.4.20}$$

进行转置后，可得

$$[\lambda_s\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_s=\boldsymbol{0} \tag{5.4.20a}$$

由上式确定的复特征矢量 $\boldsymbol{V}_s$ 称为系统的**左特征矢量**。相应地，由各个 $\boldsymbol{V}_s$ 构成的矩阵

$$\boldsymbol{V}\equiv[\boldsymbol{V}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{V}_{2n}]_{2n\times 2n}$$

称为系统的左模态矩阵。从式(5.4.19)与式(5.4.20)出发，不难证明，系统的左特征矢量 $\boldsymbol{V}_s$ 与右特征矢量 $\boldsymbol{U}_r$ 具有关于 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 的加权正交性。即当 $r\neq s$ 时，有

$$\boldsymbol{V}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_r=0,\quad \boldsymbol{V}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_r=0$$

和对称情形相仿，当 $r=s$ 时，可定义

$$\boldsymbol{V}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_r \equiv m_r', \quad \boldsymbol{V}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_r \equiv k_r'$$

且有

$$k_r' = -\lambda_r m_r'$$

注意，系统(5.4.17)与系统(5.4.18)以及它们的转置系统具有公共的特征值 $\lambda_r$，$r=1,\cdots,2n$。它们的公共特征值矩阵可记为

$$\boldsymbol{\lambda} \equiv \mathrm{diag}[\lambda_r]$$

从系统(5.4.17)及其转置系统出发，可以建立相应的 $n\times 2n$ 阶左、右模态矩阵。其右模态矩阵可记为

$$\boldsymbol{u} \equiv [\boldsymbol{u}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_{2n}]_{n\times 2n}$$

其中 $\boldsymbol{u}_r$ 由下式确定

$$[\lambda_r^2\boldsymbol{m} + \lambda_r\boldsymbol{c} + \boldsymbol{k}]\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}$$

而其左模态矩阵可记为

$$\boldsymbol{v} \equiv [\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_{2n}]_{n\times 2n}$$

其中 $\boldsymbol{v}_s$ 由下式确定

$$[\lambda_s^2\boldsymbol{m} + \lambda_s\boldsymbol{c} + \boldsymbol{k}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{0}$$

而且不难看到，系统(5.4.18)的左、右模态矩阵可表示为

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{U}_r$、$\boldsymbol{V}_r$ 与 $\boldsymbol{M}$ 的定义，不难推得

$$m_r' = \boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}}[2\lambda_r m + c]\boldsymbol{u}_r$$

现引入如下复模态变换

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{z}$$

将它代入方程(5.4.18)，然后对此方程前乘以 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$，可得

$$\mathrm{diag}[m_r']\dot{z} + \mathrm{diag}[k_r']z = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t)$$

或进一步写成

$$\dot{z} - \boldsymbol{\lambda}z = \mathrm{diag}[(m_r')^{-1}]\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t) \qquad (5.4.21)$$

写成标量形式，有

$$\dot{z}_r - \lambda_r z_r = (m_r^l)^{-1} v_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(t), \quad r = 1, \cdots, 2n \qquad (5.4.21a)$$

由此可见，非对称系统一样可以完全解耦。注意，当系统对称时，有 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}$。这时，式(5.4.21)就退化为式(5.4.15)。

在以上的讨论中都假设系统的特征根无重根，其实这并非必要。只有当系统有重特征值时，才可能出现系统是亏损的与非亏损的这样两种情形。设系统的相异特征值为 $\lambda_i$，$i = 1, \cdots, \mu$，而每个特征值 $\lambda_i$ 的重数为 $\alpha_i$，则显然有

$$\sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i = 2n$$

如果对应于每个 $\lambda_i$ 能找到 $\alpha_i$ 个独立的特征矢量，那末这种系统就称为**非亏损的**。反之，只要有一个 $\lambda_i$，与之相应的独立特征矢量数目小于 $\alpha_i$，那末这种系统就称为**亏损的**。对于非亏损系统，总可以利用上述模态分析法进行对角化。而对于亏损系统，则不可能实现对角化，但可以利用约当法式(Jordan canonical form)求解[①]。

好在对于实际的振动系统来说，绝大部分情形属于非亏损系统，而只有少数特例情形属于亏损系统。

## 5.5 系统模态(特征对)计算问题

在应用模态分析法求解多自由度系统的响应问题时，首先得确定系统的模态。这在数学上归结为求系统矩阵的特征值与特征矢量的问题，即矩阵特征对问题。现对这一问题的提法与常用解法的基本思路作一简要介绍。

---

① 参阅 Newland D E. Mechanical vibration analysis and computation. Essex, England: Longman Scientific & Technical, 1989

### 5.5.1 化简矩阵用的基本变换

在求解矩阵特征值问题中，通常采用的方法是借助一系列相似变换，将原矩阵化为简单形式的矩阵，例如对角阵、三对角阵、海森堡阵等。根据相似变换中矩阵特征值保持不变的性质，通过计算简单形式矩阵的特征值，来得到原矩阵的特征值。为此，先择要介绍有关矩阵简化用的几个基本变换。

1. 相似变换

设有非奇异矩阵$\boldsymbol{U}$，则对矩阵$\boldsymbol{A}$作变换$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$，这样的变换称为**相似变换**。

相似变换有一个重要性质，即变换后的矩阵的特征值保持不变。这可以证明如下：

矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值问题可表述为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X} \tag{5.5.1}$$

其中$\lambda$与$\boldsymbol{X}$分别为$\boldsymbol{A}$的特征值与特征矢量。由$\boldsymbol{U}$的非奇异假设，存在着$\boldsymbol{U}^{-1}$。对式(5.5.1)两端前乘以$\boldsymbol{U}^{-1}$，可得

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{X}$$

若记相似矩阵$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} \equiv \boldsymbol{B}$，记$\boldsymbol{Y} \equiv \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{X}$，则上式可改写为

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} = \lambda\boldsymbol{Y} \tag{5.5.2}$$

可见，矩阵$\boldsymbol{B}$的特征值仍为$\lambda$，而$\boldsymbol{B}$的特征矢量则变$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{X}$。因此，若求出$\boldsymbol{B}$的特征值$\lambda_i$与特征矢量$\boldsymbol{U}_i$后，则$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_i$与特征矢量$\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{U}\boldsymbol{Y}_i$也就随之而得。

2. 正交变换

若上述相似变换中，有$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$，即$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{U}^{-1}$，则这一相似变换称为**正交变换**。相应地，$\boldsymbol{U}$称为正交阵。

正交变换除保留相似变换的性质外，还有一个重要性质，即正交变换后矩阵的对称性保持不变。也就是说，若$\boldsymbol{A}$为对称阵，则正交变换后，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$仍为对称阵。

3. 旋转变换

取如下形式的矩阵 $R$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{5.5.3}$$

不难验证，$\boldsymbol{R}$ 为正交阵。利用 $\boldsymbol{R}$ 所作的相似变换，称为**旋转变换**。它的几何意义可以说明如下。

将平面直角坐标系 $ox_1x_2$ 绕原点 $o$ 旋转一个 $\theta$ 角后，记为坐标系 $oy_1y_2$，如图 5.5.1 所示。这时，同一点在新旧坐标系中的坐标关系可表示为

$$y_1 = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta$$
$$y_2 = -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta$$

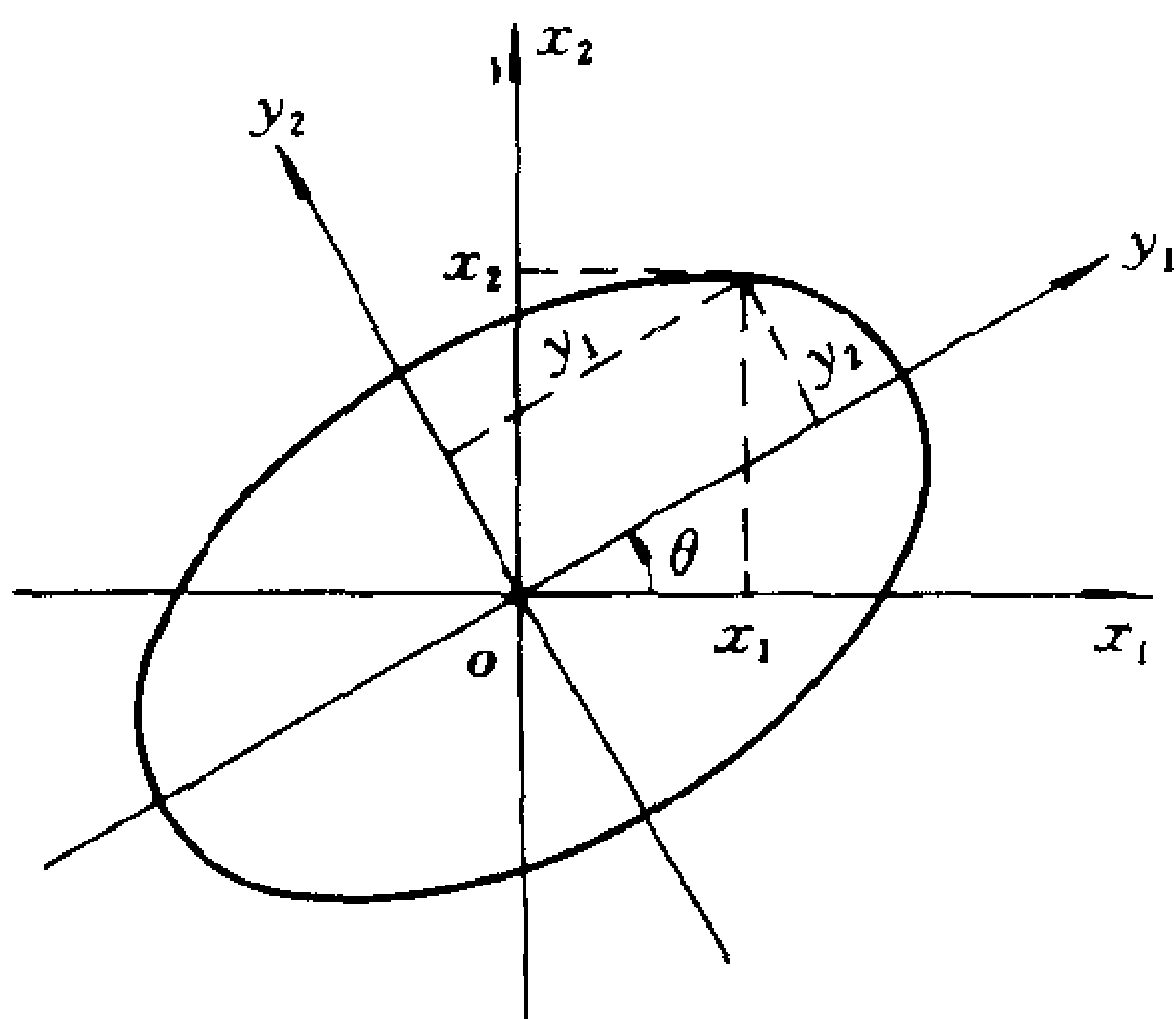



图 5.5.1　旋转变换

写成矩阵形式，有

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

或

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{y}$$

其中 $\boldsymbol{y}=[y_1\quad y_2]^{\mathrm{T}}$ 是新坐标系中的位移列阵，而 $\boldsymbol{x}=[x_1\quad x_2]^{\mathrm{T}}$ 是原坐标系中的位移列阵。可见，坐标系的旋转结果可以用线性变

换矩阵 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 的作用来表示。

更一般形式的旋转变换矩阵可取为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos\theta & \cdots & -\sin\theta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sin\theta & \cdots & \cos\theta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{5.5.4}$$

$$\qquad\qquad\qquad i \qquad\qquad j$$

注意，将式(5.5.4)中的 $\boldsymbol{R}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 时，仅影响到 $\boldsymbol{A}$ 的 $i$，$j$ 行元素；而用 $\boldsymbol{R}$ 右乘 $A$ 时，仅影响到它的 $i$，$j$ 列元素。因此，用上述 $\boldsymbol{R}$ 作相似变换时，仅能使原矩阵的 $i$，$j$ 行与 $i$，$j$ 列元素发生变化。这样，通过一系列上述旋转变换，就有可能将对称阵变换成对角阵，或将一般矩阵变换成上三角阵(或下三角阵)。

不妨来看一个特例。任意一个中心位于原点的椭圆在坐标系 $ox_1x_2$ 中(见图 5.5.1)可表示为

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=1$$

写成矩阵形式，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=1 \tag{5.5.5}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{5.5.6}$$

可见，$\boldsymbol{A}$ 为对称阵。从图 5.5.1 可以清楚地看到，通过坐标系的旋转，若使旋转后的坐标系 $oy_1y_2$ 与椭圆主轴重合，这样，在新坐标系中椭圆方程将取最简形式。这时，用式(5.5.3)中的 $\boldsymbol{R}$，对式(5.5.6)中的 $\boldsymbol{A}$ 作相似变换，有

$$R^{T}AR \equiv B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \tag{5.5.7}$$

其中

$$b_{11} = a_{11}\cos^{2}\theta + 2a_{12}\sin\theta\cos\theta + a_{22}\sin^{2}\theta$$

$$b_{22} = a_{11}\cos_{2}\theta + 2a_{12}\sin\theta\cos\theta + a_{22}\cos^{2}\theta$$

$$b_{12} = b_{21} = a_{12}(\cos^{2}\theta - \sin^{2}\theta) - (a_{11} - a_{22})\sin\theta\cos\theta$$

于是，若取

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad 或 \quad \theta = \frac{1}{2}\arctan\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \tag{5.5.8}$$

即有

$$b_{12} = b_{21} = 0$$

这样，经过上述旋转变换，对称阵 $\boldsymbol{A}$ 变换成如下对角阵 $\boldsymbol{B}$，即有

$$B = \mathrm{diag}[b_{11},\ b_{22}] \tag{5.5.9}$$

记 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{y}$，由式(5.5.5)，有

$$y^{T}By = 1 \tag{5.5.10}$$

从而在新坐标系中椭圆方程取如下最简形式

$$b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 = 1$$

4. 豪斯霍尔德(Household) 变换

豪斯霍尔德变换是指这样一种正交变换 $\boldsymbol{P}$，对于任意给定的 $\boldsymbol{a} = [a_1 \quad \cdots \quad a_n]^{T} \in R^{n}$，有

$$Pa = -\sigma e_1 \tag{5.5.11}$$

其中

$$e_1 = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^{T}$$

$$\sigma = \begin{cases} (a^{T}a)^{1/2}, & a_1 \geqslant 0 \\ -(a^{T}a)^{1/2}, & a_1 < 0 \end{cases} \tag{5.5.12}$$

这就是说，对于任何一个非零列阵 $\boldsymbol{a}$，经过 $\boldsymbol{P}$ 作用后，所得新列阵中只有第一个元素可保留为零的。

$\boldsymbol{P}$ 矩阵可以确定如下：若令 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} + \sigma\boldsymbol{e}_1$，则 $\boldsymbol{P}$ 可以暂取为

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}_n - \alpha \frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}}$$

式中$\alpha$待定。将上式中的$\boldsymbol{P}$作用于$\boldsymbol{a}$,注意到

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{a} + \sigma\boldsymbol{e}_1)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a} + \sigma\boldsymbol{e}_1) = 2(\sigma^2 + \sigma a_1)$$

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} + \sigma\boldsymbol{e}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \sigma^2 + \sigma a_1$$

从而有

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{I}_n a - \alpha\boldsymbol{u}\left(\frac{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}}\right) = \boldsymbol{a} - \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{u}$$

可见,若取$\alpha = 2$,即有

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{u} = -\sigma\boldsymbol{e}_1$$

因此,$\boldsymbol{P}$矩阵可以确定为

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}_n - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = 1 \tag{5.5.13}$$

式中$\boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}}}$。

读者可进一步验证:$\boldsymbol{P}$是一个对称正交阵,即有$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}^{-1}$。

利用上述豪斯霍尔德变换$\boldsymbol{P}$进行的相似变换,称为豪斯霍尔德相似变换,简称H相似变换。可以证明:通过选取不同的$\boldsymbol{v}$,利用一系列H相似变换,可以将一个对称阵化为三对角阵;也可以将一般的非对称阵化为上海森堡(Hessenberg)阵。所谓上海森堡阵是指如下形式的矩阵:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{43} & \cdots & a_{4,n-1} & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

即有

$$a_{ij} = 0, \quad i > j + 1$$

5. 矩阵的三角分解

有时，需要将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为单位下三角阵 $\boldsymbol{L}$ 和上三角阵 $\boldsymbol{R}$ 的乘积。为此，可引入矩阵 $\boldsymbol{L}_i$，它是将单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的第 $i$ 列改为

$$[0, \cdots, 0, 1, -b_{i+1,i}, \cdots, -b_{ni}]^{\mathrm{T}}$$

而成的。其中元素 $b_{ji}(j > i)$ 可根据 $\boldsymbol{A} \equiv [a_{ij}]$ 中的元素取为

$$b_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}, \quad j = i + 1, \cdots, n$$

不难看出，用 $\boldsymbol{L}_i$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，即可将 $\boldsymbol{A}$ 中第 $i$ 列的第 $i+1$ 至第 $n$ 个元素化为零。这样，通过 $n-1$ 次 $\boldsymbol{L}_i(i = 1, \cdots, n-1)$ 阵左乘 $\boldsymbol{A}$，即可将 $\boldsymbol{A}$ 化为上三角阵 $\boldsymbol{R}$，即有

$$\boldsymbol{L}_{n-1}\boldsymbol{L}_{n-2}\cdots\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$$

注意，$\boldsymbol{L}_i$ 的逆阵与 $\boldsymbol{L}_i$ 具有同样的形式，差别仅在于 $\boldsymbol{L}_i^{-1}$ 的第 $i$ 列应取为

$$[0, \cdots, 0, 1, b_{i+1,i}, \cdots, b_{ni}]^{\mathrm{T}}$$

这样，$\boldsymbol{A}$ 就可以表示为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}_1^{-1}\cdots\boldsymbol{L}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{R}$$

记 $\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{L}_1^{-1}\cdots\boldsymbol{L}_{n-1}^{-1}$，上式可写成

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R}$$

注意，$\boldsymbol{L}$ 是单位下三角阵之积，故仍为单位下三角阵。这样就实现了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三角分解。

**乔尔斯基(Cholesky)分解**

首先，任何一个上三角阵 $\boldsymbol{R}$ 总可以分解成对角阵 $\boldsymbol{D}$ 与单位上三角阵 $\boldsymbol{U}$ 之积。设 $\boldsymbol{R}$ 可表示为

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

这一分解可表示为

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}$$

其中

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}[d_{ii}]$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

且有

$$d_{ii} = r_{ii}, \quad i = 1, \cdots, n$$

$$u_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_{ii}}, \quad i = 1, \cdots, n; \quad j > i$$

因此,任何一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 总可以分解为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}$$

若 $A$ 为对称阵,则有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 为对称、正定,必有 $\boldsymbol{D}$ 正定;因而 $\boldsymbol{D}$ 可以分解为

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{1/2}\boldsymbol{D}^{1/2}$$

其中 $\boldsymbol{D}^{1/2} = \mathrm{diag}[\sqrt{d_{ii}}]$。记 $\widetilde{\boldsymbol{L}} \equiv \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}^{1/2}$,则有

$$\boldsymbol{A} = \widetilde{\boldsymbol{L}}\,\widetilde{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}} \tag{5.5.14}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{L}}$ 是正定的下三角阵。式(5.5.14)常称为对称、正定阵的乔尔斯基分解。

### 5.5.2 特征值问题的提法

1. 对称实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值问题

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实对称阵,则由方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

可确定其特征值与特征矢量,分别记为 $\lambda_i$ 与 $\boldsymbol{u}_i$,$i = 1, \cdots, n$,且可

正交归一化为

$$\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 为正定时，所有 $\lambda_i$ 为正。

2. 非对称实矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值问题

设 $\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶非对称实矩阵，则由方程

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

可确定其特征值与右特征矢量，分别记为 $\lambda_i$ 与 $\boldsymbol{u}_i$，$i = 1, \cdots, n$。转置矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 具有与 $\boldsymbol{B}$ 相同的特征值。而由方程

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \lambda\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \quad 或 \quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y}$$

可确定 $\boldsymbol{B}$ 的左特征矢量 $\boldsymbol{v}_i$，$i = 1, \cdots, n$。这时，左、右特征矢量可正交归一化为

$$\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}$$

3. 实对称正定矩阵 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 的广义特征值问题

这时，广义特征值问题可提为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$$

由于 $\boldsymbol{M}$ 是正定实对称阵，因而可对 $\boldsymbol{M}$ 进行乔尔斯基三角分解，即有

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 为非奇异的下三角实矩阵。通过变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{L}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$$

上述广义特征值问题可化为实对称矩阵的特征值问题。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{L}^{-\mathrm{T}}$$

4. 有陀螺项的系统特征值问题

这时，系统的运动微分方程为

$$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{g}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{a}$$

其中，$\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 是实对称矩阵，且 $\boldsymbol{m}$ 为正定，而 $\boldsymbol{g}$ 是反对称矩阵，即

有

$$g = -g^{\mathrm{T}}$$

引入状态变量

$$x = [\dot{u}^{\mathrm{T}} \quad u^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

方程($a$)可化为

$$M\dot{x} + Kx = 0 \tag{b}$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} g & k \\ -k & 0 \end{bmatrix}$$

显而易见，$M$ 是对称实矩阵，而 $K$ 是反对称实矩阵。引入两个实变量 $y$ 与 $z$，且令

$$x = y + \mathrm{j}z$$

考虑到主振动中，有

$$\dot{x} = \mathrm{j}\omega x$$

将它代入方程($b$)后，分离实部与虚部，可得

$$[K^{\mathrm{T}}M^{-1}K]y = \omega^2 My$$

$$[K^{\mathrm{T}}M^{-1}K]z = \omega^2 Mz$$

注意，$K^{\mathrm{T}}M^{-1}K$ 是实对称阵，$M$ 是正定实对称阵，因而，问题已归结为上述广义特征值问题。

5. 一般线性振动系统特征值问题

一般线性振动系统的运动微分方程为

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

其中，$m$、$c$、$k$ 为一般实矩阵，且 $m$ 非奇异。通过如下变换

$$x = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ u \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} c & k \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

系统的特征值问题可化为

$$Bx = \lambda x$$

其中

$$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{m}^{-1}\boldsymbol{c} & -\boldsymbol{m}^{-1}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

这时,$\boldsymbol{B}$ 为非对称实矩阵。

### 5.5.3　常用解法的基本思路

1. 矩阵迭代法

(1) 幂法

求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最优势实特征值与特征矢量的简便而有效的方法是幂法。设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值可按大小排列为

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$$

相应地,有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r = \lambda_r \boldsymbol{x}_r, \quad r = 1, \cdots, n$$

从初始假设模态 $\boldsymbol{u}_0$ 出发,迭代公式取为

$$\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{s-1}, \quad s = 1, 2, \cdots$$

可以证明,当 $s \to \infty$ 时,有

$$\lim_{s\to\infty} \boldsymbol{u}_{s+1} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_s, \quad \lim_{s\to\infty} \boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{x}_1$$

幂法只能求得最优势特征值,为求次优势特征值必须利用清型迭代。

(2) 对称实矩阵 $A$ 的清型迭代

由方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

利用幂法可求得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$$

对 $\boldsymbol{x}_1$ 归一化后,取

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}$$

再用 $\boldsymbol{A}_2$ 进行迭代,可求得

$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$$

依此类推。第 $k$ 次迭代矩阵为

$$\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_{k-1} - \lambda_{k-1}\boldsymbol{x}_{k-1}\boldsymbol{x}_{k-1}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A} - \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}$$

各阶特征矢量均归一化为

$$\boldsymbol{x}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_s = \sigma_{rs}, \quad r, s = 1, \cdots, n$$

(3) 非对称实矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的清型迭代

由矩阵 $\boldsymbol{B}$,通过迭代,得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_1 = \lambda\boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 = \lambda_1\boldsymbol{y}_1$$

对 $\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{y}_1$ 归一化为

$$\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1 = 1$$

再取

$$\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B} - \lambda_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}$$

进行迭代。依此类推。第 $k$ 次迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_k = \boldsymbol{B} - \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i^{\mathrm{T}}$$

(4) 应用于广义特征值问题 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$

这时,迭代矩阵可取为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{B}_k = \boldsymbol{B} - \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}, \quad k = 2, 3, \cdots, n$$

各阶特征矢量均归一化为

$$\boldsymbol{x}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{y}_s = \delta_{rs}, \quad r, s = 1, \cdots, n$$

2. 实对称阵的雅可比(Jacobi)法

雅可比法是通过逐次旋转变换迭代来使实对称阵对角化,它可以同时得到实对称阵的全部特征值与特征矢量。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经 $k$ 次旋转变换后,得

$$A_k = \boldsymbol{R}_k^{\mathrm{T}}A_{k-1}\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R} \equiv [a_{pq}^{(k)}]$$

其中

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2\cdots\boldsymbol{R}_k$$

且有

$$\boldsymbol{R}_k = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & p & & q & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos\theta_k & \cdots & -\sin\theta_k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sin\theta_k & \cdots & \cos\theta_k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ p \\ \\ q \\ \\ \\ \end{array}$$

为了在 $k$ 次迭代中消去元素 $a_{pq}^{(k)}$，上式中的 $\theta_k$ 必须取为

$$\tan 2\theta_k = \frac{2a_{pq}^{(k-1)}}{a_{pp}^{(k-1)} - a_{qq}^{(k-1)}},\quad |\theta_k| \leqslant \frac{\pi}{4}$$

可以证明，当 $k \to \infty$ 时，$\boldsymbol{A}_k$ 的非对角元素趋于零。

3. 豪斯霍尔德法

豪斯霍尔德法可将一实对称阵化为三对角阵。考察正交相似变换

$$\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{P}_k\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{P}_k,\quad \boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}$$

其中

$$\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_k = 1$$

且 $\boldsymbol{v}_k$ 取如下形式

$$\boldsymbol{v}_k = [0 \cdots 0 \quad \beta_{k,k+1} \quad \beta_{k,k+2} \quad \beta_{kn}]^{\mathrm{T}}$$

其中

$$\beta_{k,k+1} = \left[\frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{a_{k,k+1}^{(k-1)}}{\alpha_k}\right)\right]^{1/2}$$

$$\beta_{k,j} = \mp \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{2\alpha_k\beta_{k,k+1}},\quad j = k+2,\cdots,n$$

$$\alpha_k = \left[\sum_{j=k+1}^{n} (a_{kj}^{(k-1)})^2\right]^{1/2}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-2$$

前二式中的正负号取法应一致，目的要使 $\beta_{k,k+1}$ 尽可能取大值。经过 $k=n-2$ 次变换，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 将化为三对角阵 $\boldsymbol{A}_k$。记 $\boldsymbol{A}$ 的特征矢量为 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{A}_k$ 的特征矢量为 $\boldsymbol{x}$，则有

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵

$$\boldsymbol{P} = \prod_{i=1}^{k} \boldsymbol{P}_i$$

豪斯霍尔德法也可用于将一般的实矩阵化为上海森堡阵。

4. 斯图姆(Sturm)法

设特征行列式为

$$|\boldsymbol{A}_k - \lambda \boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \beta_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 - \lambda & \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 - \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} - \lambda & \beta_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_n & \alpha_n - \lambda \end{vmatrix}$$

记矩阵$[\boldsymbol{A}_k - \lambda \boldsymbol{I}]$的 $i$ 阶主子式为 $P_i(\lambda)$，有

$$P_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda$$

$$P_i(\lambda) = (\alpha_i - \lambda)P_{i-1}(\lambda) - \beta_i^2 P_{i-2}(\lambda), \quad i = 2,3,\cdots,n$$

而系统的特征方程可写为

$$P_n(\lambda) = 0$$

为了查找特征方程的根，可有效地利用斯图姆定理：记 $P_0(\lambda)$, $P_1(\lambda)$,…, $P_n(\lambda)$ 为区间$(a, b)$上的 $s$ 序列，又 $s(\mu)$ 为 $P_0(\mu)$, $P_1(\mu)$,…,$P_n(\mu)$ 序列中的变号数，则特征多项式 $P_n(\lambda)$ 在区间$(a, b)$中的实根数正好等于 $s(a) - s(b)$。设在某个 $\mu$ 处，有 $P_i(\mu) = 0$，则 $P_i(\mu)$ 的符号应取为 $P_{i-1}(\mu)$ 的反号。

根据这一定理，不仅可确定某一区间中的特征根数目，而且通过二分法，可不断搜索到各个特征根。为了求 $s$ 序列的变号数，可有效地利用前面提到的主子式的关系式。

基于斯图姆定理，结合二分法，求出系统的近似特征值 $\bar{\lambda}_i$，并用迭代法求出特征矢量 $\boldsymbol{x}_i$，然后再利用如下瑞利(Rayleigh) 商

$$\lambda_i = \frac{\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_i}{\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_i}$$

来改进上面得到的近似特征值，这一方法通常称为行列式查找法。

5. 求特征矢量的逆迭代(Inverse iteration) 法

逆迭代法用于求三角阵的特征矢量特别有效。取迭代方程为

$$[A - \lambda \boldsymbol{I}]\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_{k-1}$$

其中 $\lambda$ 取特征值 $\lambda_r$ 的近似值。设任选的初始迭代矢量为 $\boldsymbol{v}_0$，且表示为

$$\boldsymbol{v}_0 = \sum_{r=1}^{n} a_r \boldsymbol{x}_r$$

其中 $\boldsymbol{x}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征矢量，则可证明，当 $k \to \infty$ 时，有

$$\boldsymbol{v}_k = \frac{a_r}{(\lambda_r - \lambda)^k} \boldsymbol{x}_k$$

一般先利用高斯消去法，将$[\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}]$ 变换成上三角阵 $\boldsymbol{U}$，其为

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}[A - \lambda \boldsymbol{I}]$$

然后用

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0$$

进行迭代。当 $\lambda$ 充分接近于 $\lambda_r$ 时，往往收敛极快。

6. 子空间迭代法

矩阵迭代法是通过单个模态的反复迭代，使结果收敛到最优势特征值与特征矢量。子空间迭代法是用若干个假设模态作为基底，张成一个低维子空间，通过迭代而不断改善基底，使它所张成的空间逐次逼近系统的低维优势特征子空间。

对于 $n$ 阶实对称阵 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{K}$，迭代式可取为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_{k+1} = \boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{U}}_k$$

其中 $\boldsymbol{U}_k$ 是 $n \times m$ 阶矩阵，且 $m < n$；$\hat{\boldsymbol{U}}_k$ 是 $\boldsymbol{U}_k$ 关于 $\boldsymbol{M}$ 的正交归一化矩阵。上式可利用高斯消去法求解。

$\hat{\boldsymbol{U}}_k$ 的正交归一化可进行如下：借变换 $\boldsymbol{U}_k$，经里兹(Ritz) 缩聚后，有

$$\boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{U}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_k, \quad \boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{U}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_k$$

分别记缩聚系统($\boldsymbol{M}_k$, $\boldsymbol{K}_k$) 的特征值矩阵与特征矢量矩阵为 $\boldsymbol{\lambda}_k$ 与 $\boldsymbol{P}_k$，有

$$\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{M}_k\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\lambda}_k$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_k$ 是对角阵，$\boldsymbol{P}_k$ 是关于 $\boldsymbol{M}_k$ 的正交归一化矩阵。注意到

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_k\boldsymbol{P}_k$$

故在下一步迭代中可取

$$\hat{\boldsymbol{U}}_k = \boldsymbol{U}_k\boldsymbol{P}_k$$

这时，$\boldsymbol{U}_k$ 已对 $\boldsymbol{M}$ 正交归一化。

可以证明，上述迭代过程是收敛的，即有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{U}_k = \boldsymbol{X}_m, \quad \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{\lambda}_k = \boldsymbol{\lambda}_m$$

其中 $\boldsymbol{X}_m$ 与 $\boldsymbol{\lambda}_m$ 分别是原系统的 $m$ 维优势特征矢量矩阵与 $m$ 维优势特征值矩阵。

子空间迭代法兼有迭代收敛快与对计算机容量要求低的特点。当系统的 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 为高阶稀疏矩阵时，尤其显出其优越性。

7. QR 法

QR 法是通过一系列相似变换，将一个实矩阵化为三角阵。其迭代过程可取为

$$\boldsymbol{B}_s = \boldsymbol{Q}_s\boldsymbol{R}_s, \quad \boldsymbol{B}_{s+1} = \boldsymbol{R}_s\boldsymbol{Q}_s, \quad s = 1, 2, \cdots$$

其中 $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}$(给定的实矩阵)，$\boldsymbol{Q}_s$ 是酉矩阵，$\boldsymbol{R}_s$ 是上三角阵。

可以证明，当 $s \to \infty$ 时，$\boldsymbol{B}_{s-1}$ 的下三角元素(不包括对角元)趋

于零。

QR 法可以对一般的实矩阵求解其全部特征值，然后用其它方法求特征矢量。QR 法的主要优点是算法稳定。当系统矩阵为上海森堡型或三对角型时，QR 法特别显得简便。在大多数情形下，QR 法被认为是求解一般实矩阵特征值问题的最有效的方法。

有限元动力分析中常用的 HQRI 法，就是用豪斯霍尔德变换将实对称矩阵化为三对角阵，再用 QR 法求特征值，最后用逆迭代法求特征矢量。

## 5.6　系统动力响应的一般公式

前已指出，多自由度线性阻尼系统的响应问题，总可以通过实模态分析或复模态分析，归结为若干个单自由度系统或一阶系统的模态响应问题。下面分别就初始激励、复谐和激励以及任意形式的激励，给出系统响应的一般公式。

### 5.6.1　非对称系统非经典阻尼情形

1. 自由振动

设系统的初始条件为

$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad \dot{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}_0',\quad t=0$$

从而有

$$\boldsymbol{y}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_0'\\ \boldsymbol{x}_0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{z}(0)=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{y}(0)$$

考虑到

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}[m_r']$$

由此得

$$\boldsymbol{U}^{-1}=\mathrm{diag}[(m_r')^{-1}]\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}$$

因而有

$$z(0)=\operatorname{diag}[(m'_r)^{-1}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\lambda v}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{m}\\ \boldsymbol{m} & \boldsymbol{c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}'_0\\ \boldsymbol{x}_0\end{bmatrix}$$

或写成

$$z_r(0)=\frac{\boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}}}{m'_r}[\lambda_r\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}'_0+\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}_0],\quad r=1,\cdots,2n$$

这时，系统的复模态自由振动微分方程可写为

$$\dot{z}_r-\lambda_r z_r=0,\quad r=1,\cdots,2n$$

它对应于上述初始条件 $z_r(0)$ 的解为

$$\begin{aligned}z_r&=z_r(0)\mathrm{e}^{\lambda_r t}\\&=\frac{\boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}}}{m'_r}[\lambda_r\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}'_0+\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}_0]\mathrm{e}^{\lambda_r t}\end{aligned}$$

返回到原系统，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{u}\boldsymbol{z}=\sum\boldsymbol{u}_r z_r\\&=\sum_{r=1}^{2n}\frac{\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}}}{m'_r}[\lambda_r\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}'_0+\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}_0]\mathrm{e}^{\lambda_r t}\end{aligned}\qquad(5.6.1)$$

2. 任意激励下的动响应

设系统的激励 $\boldsymbol{f}(t)$ 为时间的任意函数。这时，相应的广义激励为 $\operatorname{diag}[(m'_r)^{-1}]\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t)$。因而，模态运动微分方程

$$\dot{z}_r-\lambda_r z_r=(m'_r)^{-1}\boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t)$$

对应于零初始条件的解可表示为

$$z_r=(m'_r)^{-1}\int_0^t\boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_r(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

返回到原系统，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{u}\boldsymbol{z}=\sum\boldsymbol{u}_r z_r\\&=\sum_{r=1}^{2n}\frac{\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}}}{m'_r}\int_0^t\boldsymbol{f}(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_r(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\end{aligned}\qquad(5.6.2)$$

以上为对应于零初始条件的动响应，如需考虑非零初始条件，则尚需加上式(5.6.1)所示自由振动部分。

3. 复谐和响应

设系统的激励 $\boldsymbol{f}(t)$ 为复谐和函数，即

$$\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}e^{j\omega t}$$

式中 $\boldsymbol{f}$ 表示力幅列阵。将这一 $\boldsymbol{f}(t)$ 代入零初始条件下动响应的一般公式(5.6.2)，可得

$$\boldsymbol{x} = \sum_{r=1}^{2n} \frac{\boldsymbol{u}_r \boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}}{m_r' (j\omega - \lambda_r)} (e^{j\omega t} - e^{\lambda_r t}) \tag{5.6.3}$$

上式右端包含 $e^{j\omega t}$ 的项代表激励引起的系统稳态强迫振动；而包含 $e^{\lambda_r t}$ 的项代表激励引起的系统瞬态自由振动，它将随时间的推移而逐渐消逝。如果只需考虑系统的稳态强迫振动，则有

$$\boldsymbol{x} = \sum_{r=1}^{2n} \frac{\boldsymbol{u}_r \boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}}{m_r' (j\omega - \lambda_r)} e^{j\omega t} \tag{5.6.4}$$

或写成

$$\boldsymbol{x} = \sum_{r=1}^{2n} \frac{\boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f} \boldsymbol{u}_r}{m_r' (j\omega - \lambda_r)} e^{j\omega t} \tag{5.6.4a}$$

### 5.6.2　对称系统非经典阻尼情形

对于对称系统，有

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$$

因此，只要将上一情形中所有公式中的 $\boldsymbol{v}$ 都换为 $\boldsymbol{u}$ 就可以了。

### 5.6.3　对称系统经典阻尼情形

对于经典阻尼情形，进一步有

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = [\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{A}]$$

在亚临界阻尼情形下，记

$$\lambda_r = -\zeta_r p_r + j\eta_r p_r, \quad \eta_r = \sqrt{1 - \zeta_r^2}$$

注意到

$$\boldsymbol{X}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{m} \boldsymbol{X}_r = M_r, \quad \boldsymbol{X}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c} \boldsymbol{X}_r = 2\zeta_r p_r M_r$$

不难推得

$$m_r = \boldsymbol{X}_r^{\mathrm{T}}[2\lambda_r \boldsymbol{m} + \boldsymbol{c}]\boldsymbol{X}_r = \mathrm{j}2\eta_r p_r M_r$$

且有

$$m_s = \overline{m}_{s+n}, \quad s = 1,\cdots,n$$

最终可推得亚临界经典阻尼情形下的系统动响应公式如下：

1. 自由振动

$$\boldsymbol{x} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\boldsymbol{X}_r \boldsymbol{X}_r^{\mathrm{T}}}{M_r} \mathrm{e}^{-\zeta_r p_r t} \left\{ (\cos\eta_r p_r t - \frac{\zeta_r}{\eta_r} \sin\eta_r p_r t) \boldsymbol{m}\boldsymbol{x}_0 + \frac{1}{\eta_r p_r} \sin\eta_r p_r t (\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}_0' + \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}_0) \right\} \tag{5.6.5}$$

2. 任意激励下的动响应

$$\boldsymbol{x} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\boldsymbol{X}_r \boldsymbol{X}_r^{\mathrm{T}}}{\eta_r p_r M_r} \int_0^t \boldsymbol{f}(\tau) \mathrm{e}^{-\zeta_r p_r (t-\tau)} \sin\eta_r p_r (t-\tau) \mathrm{d}\tau \tag{5.6.6}$$

3. 复谐和响应（稳态）

$$\boldsymbol{x} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\boldsymbol{X}_r \boldsymbol{X}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}}{M_r (p_r^2 - \omega^2 + \mathrm{j}2\zeta_r p_r \omega)} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{5.6.7}$$

### 5.6.4 几点小议

（1）系统的复谐和响应是各个模态复谐和响应的叠加。从经典阻尼与非经典阻尼情形的复谐和响应公式，不难看到两种情形下纯模态响应之间的一个根本差别。

如果把复谐和激励看做复平面上的一个旋转矢量，那末在系统的纯模态复谐和响应中，各个响应分量也可以用一组旋转矢量来表示。

在经典阻尼情形，从式(5.6.7)可以看到，单个模态响应 $x_r$ 可表示为

$$\boldsymbol{x}_r = \alpha_r \boldsymbol{X}_r \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

其中 $\alpha_r$ 为一复常数，即有

$$\alpha_r = \frac{\boldsymbol{X}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}}{M_r (p_r^2 - \omega^2 + \mathrm{j}2\zeta_r p_r \omega)} \equiv \rho_r - \mathrm{j}\theta_r$$

于是，$\boldsymbol{x}_r$ 可表示为

$$\boldsymbol{x}_r = \rho_r \boldsymbol{X}_r \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \theta_r)}$$

因而，纯模态响应 $\boldsymbol{x}_r$ 可以用一组共线矢量来表示，它们以角速度 $\omega$ 作整体转动。

而在非经典阻尼情形，从式(5.6.4)可以看到，单个复模态响应 $\boldsymbol{x}_r$ 可表示为

$$\boldsymbol{x}_r = \beta_r \boldsymbol{u}_r \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

其中 $\beta_r$ 为一复常数，即有

$$\beta_r = \frac{\boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}}{m_r' \ (\mathrm{j}\omega - \lambda_r)}$$

注意，$\boldsymbol{u}_r$ 是复模态，它的各个分量之间彼此存在着一定的相位差。因此，纯复模态响应 $\boldsymbol{x}_r$ 需要用一组彼此有一定相位差的共点矢量来表示，它们一起以角速度 $\omega$ 作整体转动。

由欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t$$

复谐和激励的实部与虚部(即旋转矢量在实轴与虚轴上的投影)分别表示余弦与正弦激励。相应地，复谐和响应的实部与虚部分别表示系统在余弦与正弦激励下的响应，即有

$$\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{x}_r' + \mathrm{j}\boldsymbol{x}_r''$$

如果只考虑余弦或正弦激励，那末在经典阻尼情形下，纯模态运动 $\boldsymbol{x}_r'$（或 $\boldsymbol{x}_r''$）的各个分量将同时通过零值，并同时达到极值。换句话说，各个分量运动或是同相，或是反相。而在非经典阻尼情形下，纯复模态运动 $\boldsymbol{x}_r'$（或 $\boldsymbol{x}_r''$）的各个分量之间有大于零且小于 $\pi$ 的相位差，因而 $\boldsymbol{x}_r'$（或 $\boldsymbol{x}_r''$）的各个分量不会同时通过零值，也不同时达到极值。对照例 5.3.1 与例 5.4.1 的结果，也可以看到这一点。

(2) 在正弦激振试验中，当纯模态谐和响应的各个分量仅作同相与反相运动时，可以明显地观察到振型节点。反之，当纯模态谐和响应的各个分量之间存在一定非零非 $\pi$ 的相位差时，就无法

观察到明显的振型节点。因此，可以从正弦激振试验中能否观察到驻定的振型节点来判断该系统是否属于经典阻尼情形。

(3) 从经典阻尼情形下复谐和响应的公式还可以看到，如果要在多点正弦激振试验中激发起系统的纯模态运动，例如第 $k$ 阶模态运动，则必须满足如下条件

$$\boldsymbol{X}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f} = 0, \quad r \neq k$$

也就是说，激振力矢量必须同时与其余 $n-1$ 个主振型正交。从实模态关于 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 的加权正交性可知，当 $\alpha$、$\beta$ 为任意常数，且 $\boldsymbol{f} = (\alpha\boldsymbol{M} + \beta\boldsymbol{K})\boldsymbol{X}_k$ 时，就能满足上述条件。但在试验中要实现这一点并不容易，因为事先对所需激发的主振型 $\boldsymbol{X}_k$ 尚无了解。由此可见，多点调力激振试验中纯模态运动的调试激发过程实际上只能是一个逐次逼近过程。

假设上述正交条件已经满足，为了实现纯模态共振，还必须使 $\omega = p_k$。这时，不难推得

$$\boldsymbol{x} = \frac{\alpha + \beta p_k^2}{2\zeta_k p_k^2}\boldsymbol{X}_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}(p_k t - \pi/2)}$$

可见，共振纯模态响应相对于激励有 $\frac{\pi}{2}$ 的相位滞后。

**例 5.6.1** 设图 5.6.1($a$) 所示系统中右端质量上作用着正弦激励 $F\sin\omega t$。求此系统的定常强迫振动响应。

**解** 记 $p^2 = \frac{k}{m}$，此系统的固有频率的平方值可求得为

$$p_1^2 = 0.198\ p^2$$

$$p_2^2 = 1.555\ p^2$$

$$p_3^2 = 3.247\ p^2$$

相应的主振型可求得为

$$\boldsymbol{X}_1 = [1 \quad 1.802 \quad 2.247]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{X}_2 = [1 \quad 0.445 \quad -0.802]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{X}_3 = [1 \quad -1.247 \quad 0.555]^{\mathrm{T}}$$

系统的质量矩阵为 $\boldsymbol{M}=m\boldsymbol{I}$；系统的模态质量可求得为

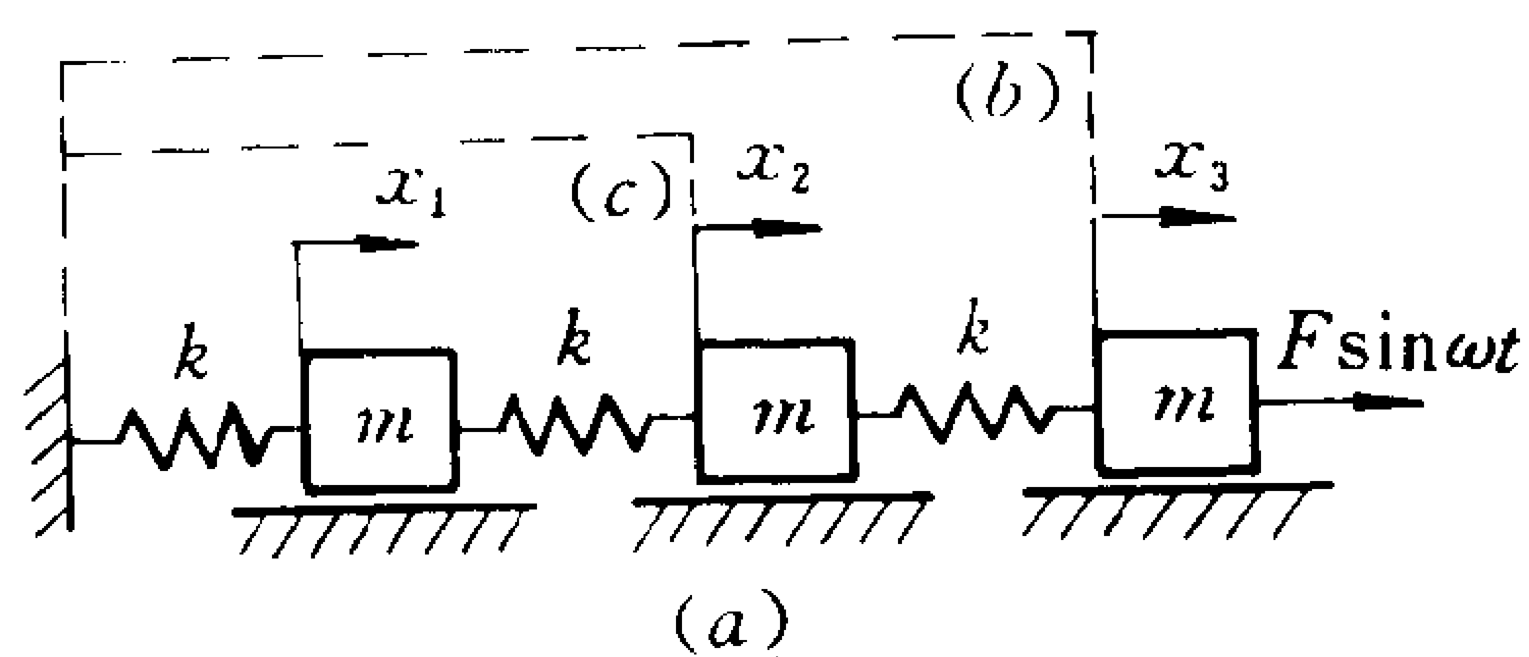
$$M_1=9.296\ m$$

$$M_2=1.837\ m$$

$$M_3=2.863\ m$$

系统的激励列阵可表示为

$$f(t)=[0\quad 0\quad F]^{\mathrm{T}}\sin\omega t$$



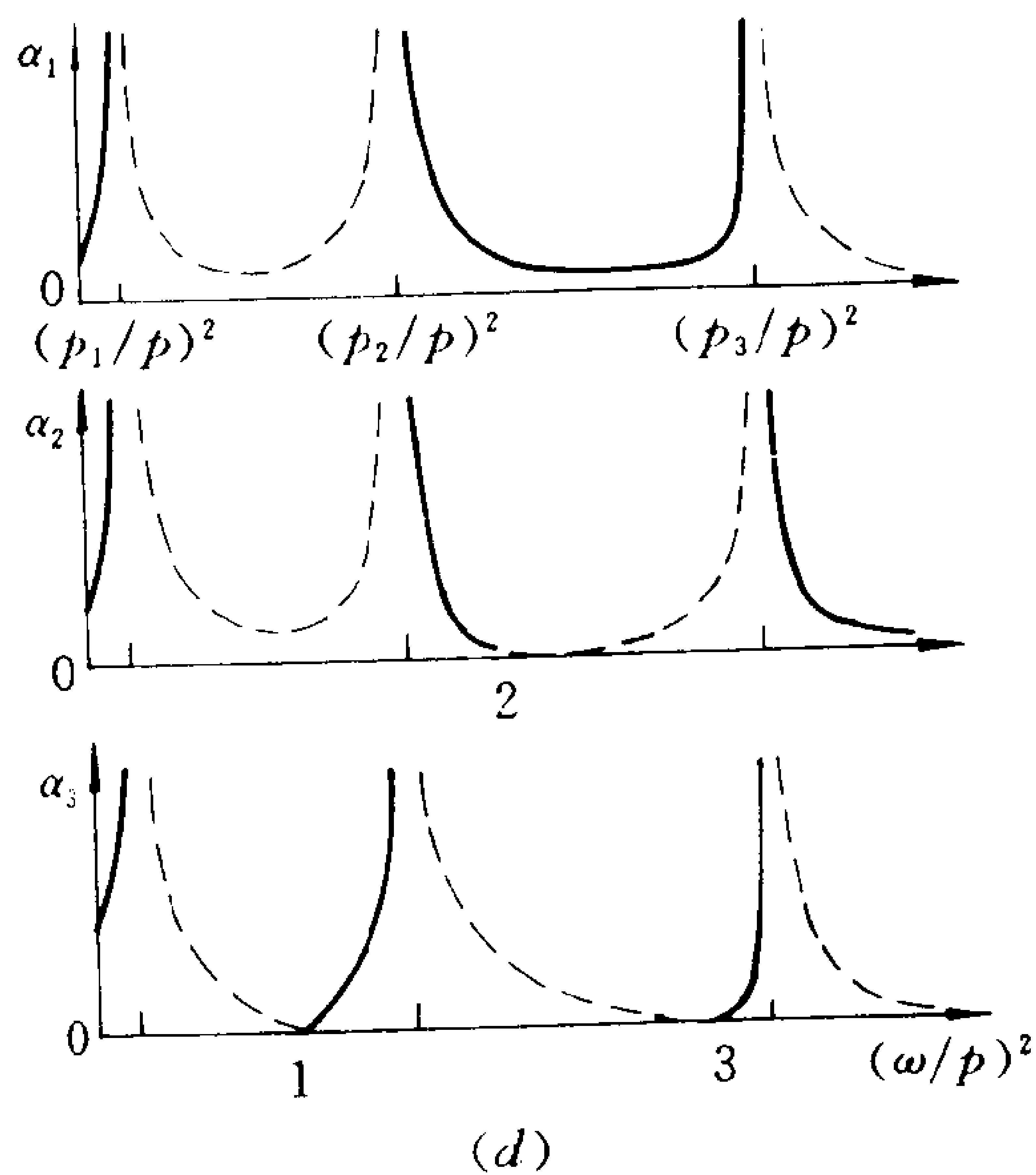




图 5.6.1　3 自由度系统及其定常响应

由式(5.6.7),系统的定常强迫振动响应可表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \sum_{r=1}^{3} \frac{\boldsymbol{X}_r \boldsymbol{X}_r^{\mathrm{T}}}{M_r(p_r^2 - \omega^2)} \boldsymbol{f}(t) \\ &\equiv [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^{\mathrm{T}} F \sin\omega t \end{aligned} \tag{5.6.8}$$

式中 $\alpha_1$、$\alpha_2$ 与 $\alpha_3$ 为系统对应于其右端谐和输入的动柔度(位移导纳)。将上述数据代入式(5.6.8),可得

$$\alpha_1 = \frac{1}{k}\left\{\frac{0.242}{0.198 - \gamma^2} - \frac{0.436}{1.555 - \gamma^2} + \frac{0.194}{3.247 - \gamma^2}\right\}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{k}\left\{\frac{0.436}{0.198 - \gamma^2} - \frac{0.194}{1.555 - \gamma^2} - \frac{0.242}{3.247 - \gamma^2}\right\}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{k}\left\{\frac{0.543}{0.198 - \gamma^2} - \frac{0.35}{1.555 - \gamma^2} + \frac{0.108}{3.247 - \gamma^2}\right\}$$

式中 $\gamma \equiv \dfrac{\omega}{p}$。再记 $\gamma_i = \dfrac{p_i}{p}$,$i = 1,2,3$;上述结果可绘成系统动柔度曲线,也称幅频响应曲线或放大率曲线,如图 5.6.1($d$) 所示。图中实线表示与激励同相的谐和响应,而虚线表示与激励反相的谐和响应。从图上可以看到,共振发生在激励频率等于系统固有频率的时候。另外,当 $\gamma^2 = 1$ 或 3 时,右端质量处的定常强迫振动振幅等于零,即出现**反共振**;又当 $\gamma^2 = 2$ 时,在中间质量处出现反共振。读者不难验证,$p$ 与 $\sqrt{3}\,p$ 正是右端质量左测子系统的固有频率,见图 5.6.1($b$),当激励频率 $\omega = p$ 或 $\sqrt{3}\,p$ 时,这一子系统充当了动力吸振器的角色;又 $\sqrt{2}\,p$ 正是中间质量左侧子系统的固有频率,见图 5.6.1($c$),当激励频率 $\omega = \sqrt{2}\,p$ 时,这一子系统起了动力吸振器的作用。

反共振现象在减振与隔振中有许多工程应用,最典型的例子是动力吸振器。关于反共振的一般规律请参阅有关文献①。

① 方同.多自由度系统中的反共振.力学学报,1979(4)

## 5.7　系统脉冲响应矩阵与传递函数矩阵

设 $n$ 自由度线性阻尼系统在 $t=0$ 时受到单位冲量对角矩阵的作用。这时，系统的运动微分方程为①

$$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{I}\delta(t)$$

在零初始条件下，系统对应于此单位冲量对角矩阵激励的响应，称为系统的**脉冲响应矩阵**，记为 $\boldsymbol{h}(t)$。在非对称系统非经典阻尼情形下，由式(5.6.2)，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}(t)&=\sum_{r=1}^{2n}\frac{\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}}}{m_r'}\int_0^t I\delta(\tau)\mathrm{e}^{\lambda_r(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\\&=\sum_{r=1}^{2n}\frac{\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}}}{m_r'}\mathrm{e}^{\lambda_r t}\end{aligned}\tag{5.7.1}$$

或写成

$$\boldsymbol{h}(t)=\boldsymbol{u}\mathrm{diag}\left[\frac{\mathrm{e}^{\lambda_r t}}{m_r'}\right]\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\tag{5.7.1a}$$

在对称系统经典阻尼情形下，由式(5.6.6)，可得

$$\boldsymbol{h}(t)=\sum_{r=1}^{n}\frac{\boldsymbol{X}_r\boldsymbol{X}_r^{\mathrm{T}}}{\eta_r p_r M_r}\mathrm{e}^{-\zeta_r p_r t}\sin\eta_r p_r t\tag{5.7.2}$$

或写成

$$\boldsymbol{h}(t)=\boldsymbol{A}\mathrm{diag}[(\eta_r p_r M_r)^{-1}\mathrm{e}^{-\zeta_r p_r t}\sin\eta_r p_r t]\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tag{5.7.2a}$$

系统脉冲响应矩阵 $\boldsymbol{h}(t)$ 的拉普拉斯变换 $\boldsymbol{H}(s)$，定义为系统的**传递函数矩阵**。在非对称系统非经典阻尼情形下，对式(5.7.1)取拉普拉斯变换，可得

$$\boldsymbol{H}(s)=\sum_{r=1}^{2n}\frac{\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}}}{m_r'(s-\lambda_r)}\tag{5.7.3}$$

或写成

① 本方程中 $\boldsymbol{x}$ 应理解为 $n\times n$ 阶响应矩阵。

$$\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{u}\mathrm{diag}[m_r'(s-\lambda_r)]^{-1}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \tag{5.7.3a}$$

在对称系统经典阻尼情形下，对式(5.7.2)取拉普拉斯变换，可得

$$\boldsymbol{H}(s)=\sum_{r=1}^{n}\frac{\boldsymbol{X}_r\boldsymbol{X}_r^{\mathrm{T}}}{M_r(s^2+2\zeta_r p_r s+p_r^2)} \tag{5.7.4}$$

或写成

$$\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{A}\mathrm{diag}[M_r(s^2+2\zeta_r p_r s+p_r^2)]^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{5.7.4a}$$

在系统的传递函数矩阵中，令 $s=\mathrm{j}\omega$，得系统的频率特性矩阵。系统的脉冲响应矩阵与频率特性矩阵之间存在傅里叶变换对关系。

系统的传递函数矩阵也可以通过对系统的特征矩阵求逆而得。系统(5.4.1)的特征矩阵定义为

$$\boldsymbol{D}(s)=s^2\boldsymbol{m}+s\boldsymbol{c}+\boldsymbol{k}$$

它的行列式称为特征行列式，记为

$$\Delta(s)\equiv|\boldsymbol{D}(s)|$$

特征矩阵的逆阵也就是系统的传递函数矩阵，由 $\boldsymbol{D}(s)$ 求逆，可得

$$\boldsymbol{H}(s)\equiv\boldsymbol{D}^{-1}(s)=\frac{\boldsymbol{B}(s)}{\Delta(s)} \tag{5.7.5}$$

式中 $\boldsymbol{B}(s)$ 是 $\boldsymbol{D}(s)$ 的伴随矩阵。

当系统的各个特征值都是单根时，有

$$\Delta(s)=|\boldsymbol{m}|(s-\lambda_1)\cdots(s-\lambda_{2n})$$

于是，式(5.7.5)可展成部分分式

$$\boldsymbol{H}(s)=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\boldsymbol{A}_j}{s-\lambda_j} \tag{5.7.6}$$

这时，各个 $\lambda_j$ 是 $\boldsymbol{H}(s)$ 的一阶极点，而各个待定的 $\boldsymbol{A}_j$ 正是 $\boldsymbol{H}(s)$ 在 $\lambda_j$ 处的留数矩阵，并可确定如下

$$\boldsymbol{A}_j=(s-\lambda_j)\boldsymbol{D}^{-1}(s)\big|_{s=\lambda_j}=\frac{\boldsymbol{B}(\lambda_j)}{\Delta'(\lambda_j)}$$

式中

$$\Delta'(\lambda_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Delta(s)\bigg|_{s=\lambda_j} \neq 0$$

注意，由式(5.7.5)，有

$$\Delta(s)\boldsymbol{I} = \boldsymbol{D}(s)\boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{D}(s) \tag{5.7.7}$$

当 $s = \lambda_j$ 时，有

$$\boldsymbol{D}(\lambda_j)\boldsymbol{B}(\lambda_j) = \boldsymbol{B}(\lambda_j)\boldsymbol{D}(\lambda_j) = \boldsymbol{0}$$

可见，$\boldsymbol{B}(\lambda_j)$ 中各列正比于系统的右特征矢量 $u_j$，而 $\boldsymbol{B}(\lambda_j)$ 中各行正比于系统左特征矢量的转置 $\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}$，因而 $\boldsymbol{B}(\lambda_j)$ 可表示为

$$\boldsymbol{B}(\lambda_j) = \alpha\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}$$

其中 $\alpha$ 为待定常数。下面来看如何确定 $\alpha$。

式(5.7.7) 对 $s$ 求导数，可得

$$\begin{aligned}\Delta'(s)\boldsymbol{I} &= \boldsymbol{D}'(s)\boldsymbol{B}(s) + \boldsymbol{D}(s)\boldsymbol{B}'(s)\\ &= [2s\boldsymbol{m} + \boldsymbol{c}]\boldsymbol{B}(s) + \boldsymbol{D}(s)\boldsymbol{B}'(s)\end{aligned}$$

上式中令 $s = \lambda_j$，可得

$$\Delta'(\lambda_j)\boldsymbol{I} = \alpha[2\lambda_j\boldsymbol{m} + \boldsymbol{c}]\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{D}(\lambda_j)\boldsymbol{B}'(\lambda_j)$$

对上式两端前乘以 $\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}$，有

$$\begin{aligned}\Delta'(\lambda_j)\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}} &= \alpha\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}[2\lambda_j\boldsymbol{m} + \boldsymbol{c}]\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\\ &= \alpha m_j'\,\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

由此可得

$$\alpha = \frac{\Delta'(\lambda_j)}{m_j'}$$

因此，$\boldsymbol{A}_j$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}_j = \frac{\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}}{m_j'} \tag{5.7.8}$$

从而由式(5.7.6)，系统的传递函数矩阵可表示为

$$\boldsymbol{H}(s) = \sum_{j=1}^{2n}\frac{\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}}{m_j'(s-\lambda_j)}$$

它与式(5.7.3) 是完全一致的。

对于系统有重特征值的情形，设系统的相异特征值为 $\lambda_i$，$i=1,\cdots,\mu$，而 $\alpha_i$ 为相应的重数，因而有

$$\sum_{i=1}^{\mu}\alpha_i = 2n$$

这时，式(5.7.5)中的 $\boldsymbol{B}(s)$ 与 $\Delta(s)$ 有公因子，在消去公因子后，可得

$$\boldsymbol{D}(s)^{-1} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}(s)}{\varphi(s)} \tag{5.7.9}$$

其中 $\varphi(s)$ 为系统的最小多项式，而 $\widetilde{\boldsymbol{B}}(s)$ 为伴随矩阵 $\boldsymbol{B}(s)$ 在消去公因子后剩余的矩阵。

当系统非亏损时，对应于每个重特征值 $\lambda_i$，总能找到 $\alpha_i$ 个独立的左、右特征矢量，它们的正交基可分别表示为 $[\boldsymbol{v}]_i$ 与 $[\boldsymbol{u}]_i$，且可规范化为

$$[\boldsymbol{v}]_i^{\mathrm{T}}[2\lambda_i\boldsymbol{m}+\boldsymbol{c}][\boldsymbol{u}]_i = m_i'\boldsymbol{I}$$

这时，系统的最小多项式为

$$\varphi(s) = (s-\lambda_1)\cdots(s-\lambda_\mu)$$

因而，$\boldsymbol{H}(s)$ 可展开为

$$\boldsymbol{H}(s) = \sum_{i=1}^{\mu}\frac{\widetilde{\boldsymbol{A}}_i}{s-\lambda_i}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ 为 $\boldsymbol{H}(s)$ 在 $\lambda_i$ 处的留数矩阵，并可确定为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_i = (s-\lambda_i)\boldsymbol{D}^{-1}(s)\big|_{s=\lambda_i} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}(\lambda_i)}{\varphi'(\lambda_i)}$$

由式(5.7.9)，有

$$\varphi(s)\boldsymbol{I} = \boldsymbol{D}(s)\widetilde{\boldsymbol{B}}(s) = \widetilde{\boldsymbol{B}}(s)\boldsymbol{D}(s)$$

当 $s=\lambda_i$ 时，有

$$\boldsymbol{D}(\lambda_i)\widetilde{\boldsymbol{B}}(\lambda_i) = \widetilde{\boldsymbol{B}}(\lambda_i)\boldsymbol{D}(\lambda_i) = \boldsymbol{0}$$

可见，$\widetilde{\boldsymbol{B}}(\lambda_i)$ 中各列可以由系统的 $\alpha_i$ 个独立的右特征矢量线性表示，而 $\widetilde{\boldsymbol{B}}(\lambda_i)$ 中各行可以由系统的 $\alpha_i$ 个独立的转置左特征矢量线性表示。对于 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ 也可以得出同样的结论。不难证明，这时，系统的传

递函数矩阵最终可表示为

$$\boldsymbol{H}(s)=\sum_{i=1}^{\mu}\frac{[\boldsymbol{u}]_i[\boldsymbol{v}]_i^{\mathrm{T}}}{m_i'(s-\lambda_i)} \tag{5.7.10}$$

当系统无重特征根时，上式就退化为式(5.7.3)。

以上得到的系统传递函数矩阵的留数矩阵与系统特征对之间的关系极为重要。在试验模态分析中，主要是根据这种关系来识别系统的模态参数的。

试验模态分析有四个主要环节：

(1) 动态测试：包括激振试验与数据采集。

(2) 动态特性估计：根据实测数据来估计系统的频域或时域的动态特性。

(3) 模态识别：根据估计的动态特性来确定系统的模态参数。

(4) 模态检验：检验所得试验模态的精度与可靠程度。

试验模态分析技术是从60年代开始发展起来的，现在已经有了许多重要进展，感兴趣的读者请参阅书末所列有关专著。

## 5.8　求系统响应的转移矩阵法

一般情形下多自由度线性阻尼系统的运动微分方程可表示为

$$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(t)$$

引入状态变量，上述系统可变换为如下形式

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(t) \tag{5.8.1}$$

其中

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \boldsymbol{x}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}(t)\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{m}^{-1}\boldsymbol{c} & -\boldsymbol{m}^{-1}\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{m}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

与方程(5.8.1)相对应的齐次方程为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

它的解取如下形式

$$\boldsymbol{y} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{y}(0)$$

其中,矩阵 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 可表示成级数形式

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + t\boldsymbol{A} + \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \cdots$$

现引入 $2n \times 2n$ 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{G}(t)$,用它来前乘式(5.8.1),得

$$\boldsymbol{G}(t)\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{A}(y) + \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(t) \tag{5.8.2}$$

考虑到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{y}\} = \dot{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{y}}$$

方程(5.8.2)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}\} - \dot{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(t) \tag{5.8.3}$$

现选取 $\boldsymbol{G}(t)$,使之满足

$$\dot{\boldsymbol{G}} = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} \tag{5.8.4}$$

由上式可解得

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{G}(0)$$

其中

$$\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} - t\boldsymbol{A} + \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{A}^2 - \cdots$$

为简化起见,不妨取 $\boldsymbol{G}(0) = \boldsymbol{I}$,从而有

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t} \tag{5.8.5}$$

且不难看到,有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$$

所以方程(5.8.4)也可写为

$$\dot{\boldsymbol{G}} = -\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$$

于是,方程(5.8.3)可化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}\} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(t)$$

由上式直接求积分，可得

$$\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}(0) + \int_0^t \boldsymbol{G}(\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

对上式前乘以 $\boldsymbol{G}^{-1}(t)$，并考虑到式(5.8.5)，可得

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{y}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (5.8.6)$$

它是非齐次方程(5.8.1)的全解。

下述矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \tau) \equiv \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}$$

通常称为**转移矩阵**。它具有如下重要特性，通常称为传递特性，即有

$$\boldsymbol{\Phi}(t_3, t_1) = \boldsymbol{\Phi}(t_3, t_2)\boldsymbol{\Phi}(t_2, t_1)$$

这一特性给转移矩阵的计算带来很大方便，即可将时间间隔分成一系列小间隔，在每个小间隔内只需用到少数几项就能保证级数展式的收敛性。这一特性还隐含有

$$\boldsymbol{\Phi}(t_2, t_1) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_1, t_2)$$

现在来看转移矩阵的算法。注意到

$$\boldsymbol{\Phi}(t, 0) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + t\boldsymbol{A} + \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{A}^2 + \cdots$$

实际计算中只能取有限项，例如取 $n$ 项，得

$$\boldsymbol{\Phi}_n = \boldsymbol{I} + t\boldsymbol{A} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\boldsymbol{A}^n$$

上式可重新写为

$$\boldsymbol{\Phi}_n = \boldsymbol{I} + t\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{I} + \frac{t}{2}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{I} + \frac{t}{3}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{I} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \cdots\left(\boldsymbol{I} + \frac{t}{n-1}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{I} + \frac{t}{n}\boldsymbol{A}\right)\right)\cdots\right)\right)\right)$$

由此可得递推式

$$\psi_1 = I + \frac{t}{n}A$$

$$\psi_2 = I + \frac{t}{n-1}A\psi_1$$

$$\vdots$$

$$\Phi_n = I + tA\psi_{n-1}$$

这一计算只需 $n-1$ 个矩阵乘法。当 $t$ 很大时,需要保持 $n$ 相当大,才能保证 $\Phi_n$ 的收敛性。这时,可将时间间隔 $(t, 0)$ 分割成一系列子间隔 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, \cdots, k$。由传递特性,有

$$\begin{aligned}\Phi_n(t, 0) &= \Phi_n(t_k, t_{k-1}) \cdots \Phi_n(t_1, t_0) \\ &= \prod_{i=1}^{k} \Phi_n^i(\Delta t_i, 0)\end{aligned}$$

其中 $t_k = t$, $t_0 = 0$。

现在来看转移矩阵法与模态分析法之间的关系。记矩阵 $A$ 的特征值矩阵为 $\lambda$, $A$ 的左、右模态矩阵分别记为 $V$ 与 $U$,且已正交归一化为

$$V^{\mathrm{T}}U = I, \quad V^{\mathrm{T}}AU = \lambda$$

这一关系也可写成

$$UV^{\mathrm{T}} = I, \quad A = U\lambda V^{\mathrm{T}}$$

于是,可以推得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{At} &= I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots \\ &= UV^{\mathrm{T}} + tU\lambda V^{\mathrm{T}} + \frac{t^2}{2!}U\lambda V^{\mathrm{T}}U\lambda V^{\mathrm{T}} \\ &\quad + \frac{t^3}{3!}U\lambda V^{\mathrm{T}}U\lambda V^{\mathrm{T}}U\lambda V^{\mathrm{T}} + \cdots \\ &= UV^{\mathrm{T}} + tU\lambda V^{\mathrm{T}} + \frac{t^2}{2!}U\lambda^2 V^{\mathrm{T}} + \frac{t^3}{3!}U\lambda^3 V^{\mathrm{T}} + \cdots \\ &= U\left(I - t\lambda + \frac{t^2}{2!}\lambda^2 + \frac{t^3}{3!}\lambda + 3 + \cdots\right)V^{\mathrm{T}} \\ &= U\mathrm{e}^{\lambda t}V^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

因此，系统的转移矩阵可表示为

$$\boldsymbol{\Phi}(t,\ \tau) = \boldsymbol{U}\mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$$

利用 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的上述表示式，不难从式(5.8.6)得到系统响应的一般表示式

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{U}\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}(0) + \int_0^t \boldsymbol{U}\mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (5.8.7)$$

它类似于由复模态分析法所得系统响应的一般形式。

## 5.9　无约束结构的弹性模态

无约束结构兼有弹性振动模态与刚体运动模态，后者相当于零固有频率的运动模态。无约束结构的刚度矩阵是奇异的，导致所谓半定系统的特征值问题。这时，往往需要从半定系统中分离出全定子系统来。可以通过多种途径来达到这一目的。本节介绍采用清型缩聚变换的方法。

首先给出系统特征值的变分式。设有多自由度无阻尼线性系统，其质量矩阵为$M$，刚度矩阵为$K$。这时，系统的**瑞利商**可定义为

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}} = \frac{E_{\mathrm{P}}}{E_{\mathrm{k}}} \qquad (5.9.1)$$

其中$\boldsymbol{X}$是假设振型。可以证明，瑞利商在系统的各个特征矢量处取驻值；当$\boldsymbol{X}$取为系统的各阶主振型$\boldsymbol{X}_i$时，瑞利商给出相应的特征值$\lambda_i$。因此，特征值问题的变分式可表示为

$$\lambda = \mathrm{st}\ \frac{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}} \qquad (5.9.2)$$

式中驻值st是对$\boldsymbol{X}$取的。事实上，上式取驻值的充要条件是

$$\delta\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}\boldsymbol{X} - \lambda\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}] = 0$$

可见，代数特征值问题与瑞利商驻值问题是完全等价的。瑞利商表示式中的分子与分母都具有明显的物理意义。分子正比于系统势能的幅值，而分母则正比于系统动能的幅值。一般情形下，$M$总是

正定的，即对于任何非零的 $\boldsymbol{X}$，总有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} > 0$$

而对于 $\boldsymbol{K}$ 来说，它有可能是半正定的，即对于任何非零的 $\boldsymbol{X}$，有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{X} \geqslant 0$$

当结构具有刚体自由度时，情况就是如此。

现在的问题是如何从半定系统中消去刚体运动自由度，而只剩下全定的弹性系统。从式(5.9.2)可以看到，要想得到非零的特征值，只需从假设振型中去掉对应于零特征值的刚体运动模态。一般说来，无约束结构所具有的刚体自由度数 $r$，以及相应的刚体运动模态 $X_j$，$j=1,\cdots,r$，都不难从物理上确定。现假定这些信息都是已知的。

任意非零的假设振型 $\boldsymbol{Y}$ 总可表示为

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{X}_i \tag{5.9.3}$$

式中 $a_j$ 为常数，$\boldsymbol{X}_i$ 为系统的主振型，假设 $\boldsymbol{X}_i$ 已正交归一化为

$$\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_j = \delta_{ij}, \quad \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}_j = \lambda_i\delta_{ij}$$

引入如下清型变换矩阵

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} - \sum_{j=1}^{r}\boldsymbol{X}_j\boldsymbol{X}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} \tag{5.9.4}$$

再作变换

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y} \tag{5.9.5}$$

不难看到，这时的 $\boldsymbol{X}$ 仅包括从 $\boldsymbol{Y}$ 中清除了所有刚体运动模态后的剩余模态。事实上，式(5.9.3)前乘以 $\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}$，可得

$$a_i = \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}$$

因而有

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y} = \sum_{i=r+1}^{n} a_i\boldsymbol{X}_i$$

这样，将变换(5.9.5)代入变分式(5.9.2)后，可得

$$\lambda = \mathrm{st}\ \frac{\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}}$$

上式可以看作具有质量矩阵 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{C}$ 与刚度矩阵 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{C}$ 的新系统的特征值问题。但是，这样得到的 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{C}$ 都是奇异的，因为不仅 $\boldsymbol{K}$ 是奇异的，而且 $\boldsymbol{C}$ 也是奇异的。

事实上，原系统的特征矢量 $\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n$ 构成了 $n$ 维空间的完备正交基。$n$ 维空间的任一非零矢量 $\boldsymbol{Y}$ 经过 $\boldsymbol{C}$ 变换后，映射到由 $\boldsymbol{X}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{X}_n$ 所张成的子空间内。因而，$\boldsymbol{C}$ 的秩是 $n-r$。也就是说，$\boldsymbol{C}$ 的 $n$ 列中只有 $n-r$ 列是独立的。所以，只要在 $\boldsymbol{C}$ 中任意选定 $n-r$ 个独立的列，划去其余 $r$ 列，构成 $n\times(n-r)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$；同时在 $\boldsymbol{Y}$ 中划去相应的 $r$ 个元素，构成 $n-r$ 维列阵 $\boldsymbol{Z}$；然后取变换

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}$$

由此可得一缩聚系统，其质量矩阵为

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{P}$$

其刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}_0 = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}$$

不难看到，$\boldsymbol{M}_0$ 与 $\boldsymbol{K}_0$ 都是满秩的，其秩为 $n-r$。这样，原半定系统 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{K})$ 的非零特征值问题可归结为全定缩聚系统 $(\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{K}_0)$ 的特征值问题。

在求出缩聚系统 $(\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{K}_0)$ 的特征对 $(\lambda_i, \boldsymbol{Z}_i)$ 后，原系统 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{K})$ 的相应特征对可得为 $(\lambda_i, \boldsymbol{X}_i)$，其中

$$\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}_i, \quad i = r+1, \cdots, n$$

值得指出的是，只要 $\boldsymbol{Z}_i$ 已对 $\boldsymbol{M}_0$ 正交归一化，那末 $\boldsymbol{X}_i$ 对 $\boldsymbol{M}$ 也已是正交归一化的。

上述在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中划去 $r$ 列的做法与在列阵 $\boldsymbol{Y}$ 中划去相应的 $r$ 个元素的做法，两者是一致的。物理上，后者可简单地归结为在原结构上选取 $r$ 个点，在其上附着一个动坐标系，使该坐标系具有前面所述的 $r$ 个刚体运动自由度，而相对于该动坐标系来说，原结构

具有静定约束。

**例 5.9.1** 设有图 5.9.1 所示三质量弹性系统，它具有一个刚体平动自由度。试求其非零特征值与相应的特征矢量。

**解** 系统的质量矩阵为

$$\boldsymbol{M} = m\boldsymbol{I}$$

刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K} = k\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

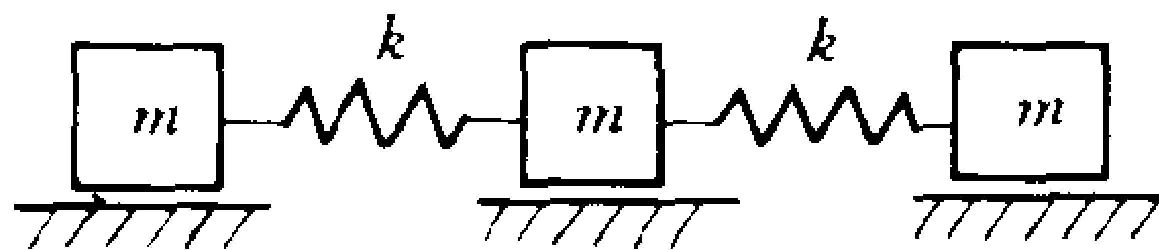



图 5.9.1 半定系统(一)

系统的平动模态可取为

$$\boldsymbol{X} = \frac{[1 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}}{\sqrt{3m}}$$

由式(5.9.4)，可得

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

可见，$\boldsymbol{C}$ 中只有两列是独立的。这时，可以划去 $\boldsymbol{C}$ 中任意一列，得 $\boldsymbol{P}$。这相当于可以将平动坐标系固连在其中任何一个质量上。假如划去第三列，可得

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

作缩聚变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$，可得缩聚系统

$$[\boldsymbol{K}_0 - \lambda \boldsymbol{M}_0]\boldsymbol{z} = 0$$

其中

$$\boldsymbol{K}_0 = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} 9k$$

$$M_c = P^T M P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} 3m$$

由此得该缩聚系统的特征值为

$$\lambda_1 = \frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = \frac{3k}{m}$$

相应的特征矢量 $Z_i$ 为

$$Z_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T, \quad Z_2 = [0 \quad 1]^T$$

由缩聚变换，可得原系统的特征矢量 $X_i$ 为

$$X_1 = [1 \quad 0 \quad -1]^T, \quad X_2 = [-1 \quad 2 \quad -1]^T$$

**例 5.9.2**　设有图 5.9.2 所示三个质量由弹性剪切梁对称地连接而成的系统，仅考察各个质点沿铅垂方向的运动，系统有两个刚体运动模式，即铅垂方向的平动与绕质心的转动。试求其非零特征值以及相应的特征矢量。

**解**　系统的质量矩阵为

$$M = m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

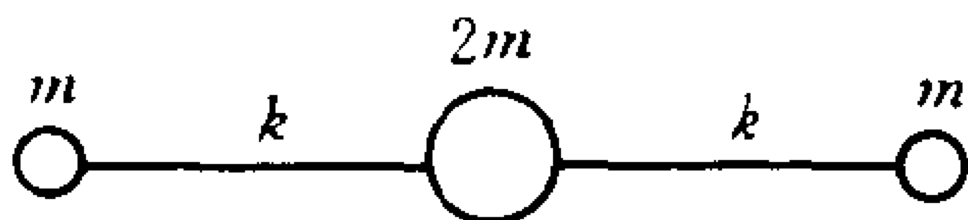



图 5.9.2　半定系统(二)

刚度矩阵为

$$K = k\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

系统的刚体运动模态可取为

$$X_1 = \frac{[1 \quad 1 \quad 1]^T}{2\sqrt{m}}$$

$$X_2 = \frac{[-1 \quad 0 \quad 1]^T}{\sqrt{2m}}$$

按式(5.9.4),可得

$$C=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

可见,$C$ 中只有一列是线性独立的。这时,可以划去 $C$ 中任意两列,得 $P$ 为

$$P=[1\quad -1\quad 1]^{\mathrm{T}}$$

由此得

$$P^{\mathrm{T}}MP=4m$$

$$P^{\mathrm{T}}KP=8k$$

因而缩聚系统为

$$(2k-\lambda m)z=0$$

由此得缩聚系统的特征值与特征矢量为

$$\lambda=\frac{2k}{m}$$

$$z=1$$

由缩聚变换,可得原系统的相应特征矢量为

$$X=[1\quad -1\quad 1]^{\mathrm{T}}$$

**例 5.9.3**　设有长 $l$,抗弯刚度为 $EI$ 的均匀梁,一端铰支于 $A$,一端自由,梁本身质量可略去不计;梁上等距安有三个相同的集中质量,如图 5.9.3 所示。系统有一个刚体运动自由度,即绕 $A$ 的转动。试求系统的弯曲振动特征值与相应的特征矢量。

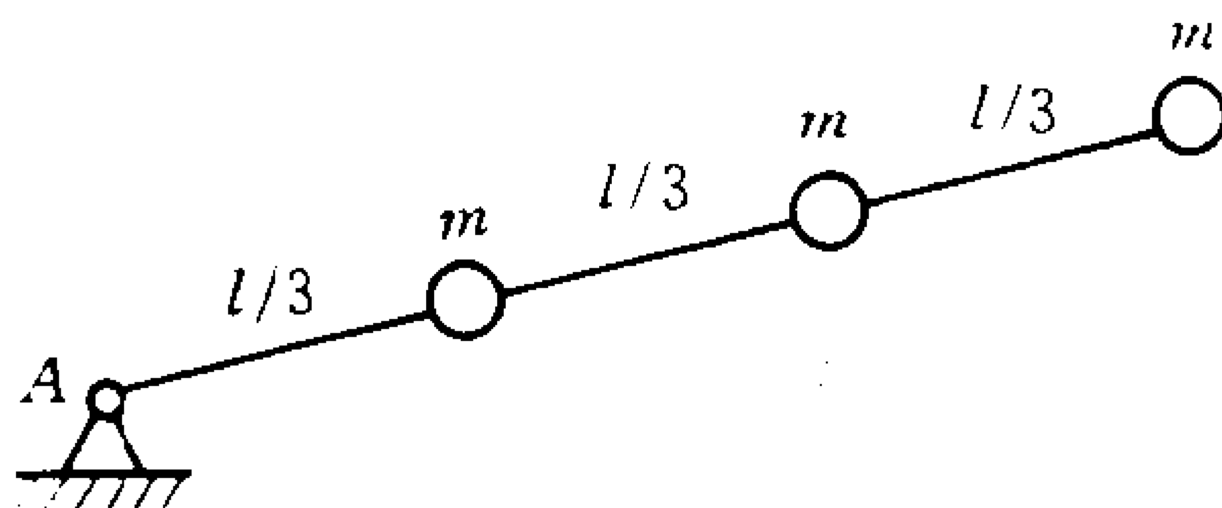



图 5.9.3　半定系统(三)

**解**　系统的质量矩阵为

$$M=mI$$

刚度矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} 24 & -21 & 6 \\ -21 & 24 & -9 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix} \frac{54}{5} \frac{EI}{l^3}$$

系统的刚体运动模态可取为

$$X = \frac{[1 \quad 2 \quad 3]^{\mathrm{T}}}{\sqrt{14m}}$$

按式(5.9.4),可得

$$C = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{bmatrix} \equiv [u_1 \quad u_2 \quad u_3]$$

不难看到,$C$ 中各列有如下关系

$$2u_1 + 4u_2 + 6u_3 = 0$$

因而只有两列是线性独立的。故可取 $P$ 为

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

由此得

$$M_0 \equiv P^{\mathrm{T}} M P = 7 \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 10 \end{bmatrix} m$$

$$K_0 \equiv P^{\mathrm{T}} K P = 7 \begin{bmatrix} 12 & -9 \\ -9 & 8 \end{bmatrix} \frac{151.2EI}{l^3}$$

令 $\alpha = \dfrac{151.2EI}{ml^3}$,可得缩聚系统($M_0$, $K_0$)的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -5\lambda + 12\alpha & 6\lambda - 9\alpha \\ 6\lambda - 9\alpha & -10 + 8\alpha \end{vmatrix} = 0$$

由此可得缩聚系统的特征值为

$$\lambda_1 = 4.413\alpha = \frac{47.66EI}{ml^3}$$

$$\lambda_2 = 47.58\alpha = \frac{513.9EI}{ml^3}$$

缩聚系统相应的特征矢量为

$$\boldsymbol{Z}_1 = [0.682 \quad 1]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{Z}_2 = [1 \quad 0.439]^{\mathrm{T}}$$

按缩聚变换，可得原系统相应的特征矢量为

$$\boldsymbol{X}_1 = [-1.247 \quad -0.877 \quad 1]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{X}_2 = [2.878 \quad -2.939 \quad 1]^{\mathrm{T}}$$

## 5.10 模态摄动问题

模态摄动问题主要研究结构参数变化的系统模态参数的影响。它在振动工程中有许多应用，例如，结构修改设计中的重分析、结构优化设计中特征灵敏度分析等。本节先介绍实模态摄动问题，给出其一阶及二阶摄动公式，以及特征灵敏度分析；然后介绍复模态摄动问题。

### 5.10.1 实模态摄动问题

1. 特征值分析

实模态分析指出，一个质量矩阵为 $\boldsymbol{M}_0$，刚度矩阵为 $\boldsymbol{K}_0$ 的 $n$ 自由度无阻尼振动系统，具有 $n$ 个实特征值

$$\lambda_{01}, \cdots, \lambda_{0n}$$

与之相应，有 $n$ 个实特征矢量

$$\boldsymbol{X}_{01}, \cdots, \boldsymbol{X}_{0n}$$

它们满足如下主振型方程

$$\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{X}_{0i} = \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{X}_{0i}, \quad i = 1, \cdots, n$$

如果对上述系统作某种小修改，修改后的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 与刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可分别表示为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \varepsilon \boldsymbol{M}_1, \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_0 + \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \tag{5.10.1}$$

其中 $\varepsilon$ 是小参数。记原系统的特征值矩阵为

$$\boldsymbol{\lambda}_0 \equiv \mathrm{diag}[\lambda_{0i}]$$

原系统的实模态矩阵为

$$\boldsymbol{A}_0 \equiv [\boldsymbol{X}_{01} \cdots \boldsymbol{X}_{0n}]$$

则修改后系统的特征矩阵 $\lambda$ 与实模态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可表示为 $\varepsilon$ 的幂级数，其为

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\lambda}_1 + \varepsilon^2 \boldsymbol{\lambda}_2 + \cdots \tag{5.10.2}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \varepsilon \boldsymbol{A}_1 + \varepsilon^2 A_2 + \cdots \tag{5.10.3}$$

$\varepsilon\lambda_1$ 与 $\varepsilon^2\lambda_2$ 分别为 $\lambda$ 的一阶与二阶摄动，而 $\varepsilon \boldsymbol{A}_1$ 与 $\varepsilon^2 \boldsymbol{A}_2$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的一阶与二阶摄动。

一阶摄动的公式可导出如下：假设原系统的各个特征矢量均已归一化为

$$\boldsymbol{X}_{0j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{X}_{0i} = \delta_{ij}, \quad \boldsymbol{X}_{0j}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_0 \boldsymbol{X}_{0i} = \lambda_{0i} \delta_{ij}$$

并记

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{diag}[\tilde{\lambda}_i], \quad \boldsymbol{A} = [X_1 \cdots X_n]$$

$$\boldsymbol{\lambda}_j = \mathrm{diag}[\lambda_{ji}], \quad \boldsymbol{A}_j = [X_{j1}, \cdots, X_{jn}]$$

于是有

$$\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{X}_{0i} + \varepsilon \boldsymbol{X}_{1i} + \cdots$$

修改后系统的主振型方程为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}_i = \tilde{\lambda}_i \boldsymbol{M} \boldsymbol{X}_i$$

将式(5.10.1)、(5.10.2)、(5.10.3)代入上式后，得

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{K}_0 + \varepsilon \boldsymbol{K}_1)(\boldsymbol{X}_{0i} + \varepsilon \boldsymbol{X}_{1i} + \cdots)\\ &= (\lambda_{0i} + \varepsilon \lambda_{1i} + \cdots)(\boldsymbol{M}_0 + \varepsilon \boldsymbol{M}_1)(\boldsymbol{X}_{0i} + \varepsilon \boldsymbol{X}_{1i} + \cdots)\end{aligned}$$

上式展开后，比较 $\varepsilon$ 的同次幂项，得

$$\begin{aligned}&\varepsilon^0: \quad K_0 \boldsymbol{X}_{0i} = \lambda_{0i} \boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{X}_{0i}\\ &\varepsilon^1: \quad K_0 \boldsymbol{X}_{1i} + K_1 \boldsymbol{X}_{0i} = \lambda_{0i} \boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{X}_{1i} + \lambda_{0i} \boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{X}_{0i} + \lambda_{1i} \boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{X}_{0i}\end{aligned} \tag{5.10.4}$$

⋮

注意，当各个 $\lambda_{0i}$ 各不相同时，矩阵 $\boldsymbol{A}_0$ 中各列构成 $n$ 维空间的一组完备正交基。故 $\boldsymbol{X}_{1i}$ 可表示为

$$\boldsymbol{X}_{1i} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\boldsymbol{X}_{0k}, \quad i = 1, \cdots, n \tag{5.10.5}$$

对式(5.10.4) 前乘以 $\boldsymbol{X}_{0i}^{\mathrm{T}}$，并用式(5.10.5) 代入，考虑到各个 $\boldsymbol{X}_{0k}$ 关于 $\boldsymbol{M}_0$ 与 $\boldsymbol{K}_0$ 的加权正交性，有

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_0\alpha_{ii}\boldsymbol{X}_{0i} + \boldsymbol{X}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{X}_{0i} \\ &= \lambda_{0i}\boldsymbol{X}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\alpha_{ii}\boldsymbol{X}_{0i} + \lambda_{0i}\boldsymbol{X}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_{0i} + \lambda_{1i}\boldsymbol{X}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{X}_{0i} \end{aligned}$$

由此得

$$\lambda_{1i} = \boldsymbol{X}_{0i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_1 - \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{X}_{0i}, \quad i = 1,\cdots,n \tag{5.10.6}$$

对式(5.10.4) 前乘以 $\boldsymbol{X}_{0k}^{\mathrm{T}}$，并利用式(5.10.5)，则有

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}_{0k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_0\alpha_{ik}\boldsymbol{X}_{0k} + \boldsymbol{X}_{0k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{X}_{0i} \\ &= \lambda_{0i}\boldsymbol{X}_{0k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\alpha_{ik}\boldsymbol{X}_{0k} + \lambda_{0i}\boldsymbol{X}_{0k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_{0i} + \lambda_{1i}\boldsymbol{X}_{0k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{X}_{0i} \end{aligned}$$

由此得

$$\alpha_{ik} = (\lambda_{0i} - \lambda_{0k})^{-1}\boldsymbol{X}_{0k}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_1 - \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{X}_{0i}, \quad i \neq k \tag{5.10.7}$$

当 $i = k$ 时，可取

$$\alpha_{ii} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{X}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_{0i} \tag{5.10.8}$$

于是，式(5.10.5) 可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_0[\alpha_{ik}]^{\mathrm{T}} \tag{5.10.5a}$$

其中 $\alpha_{ik}$ 由式(5.10.7) 与式(5.10.8) 确定。

类似地，可得二阶摄动公式为

$$\begin{aligned} \lambda_{2i} = &\boldsymbol{X}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{X}_{1i} - \lambda_{0i}\boldsymbol{X}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_{1i} - \lambda_{1i}\boldsymbol{X}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{X}_{1i} \\ &- \lambda_{1i}\boldsymbol{X}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{X}_{0i}, \quad i = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{5.10.9}$$

$$\boldsymbol{X}_{2i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\boldsymbol{X}_{0k}, \quad i = 1, \cdots, n \tag{5.10.10}$$

或

$$A_2 = A_0[\beta_{ik}]^{\mathrm{T}} \tag{5.10.10a}$$

其中

$$\beta_{ik} = (\lambda_{0i} - \lambda_{0k})^{-1} X_{0k}^{\mathrm{T}} \{ (K_1 - \lambda_{0i} M_1 - \lambda_{1i} M_0) X_{1i} - \lambda_{1i} M_1 X_{0i} \}, \quad i \neq k$$

$$\beta_{ii} = -\frac{1}{2}(X_{1i}^{\mathrm{T}} M_0 X_{1i} + X_{0i}^{\mathrm{T}} M_1 X_{1i} + X_{1i}^{\mathrm{T}} M_1 X_{0i})$$

以上的推导中假设了各个 $\lambda_{0i}$ 都不相同。如果 $\lambda_{0i}$ 为 $s$ 重特征值，且系统是非亏损的，从而相应地有一组 $s$ 个线性独立的特征矢量

$$X = [X_i \cdots X_{i+s}]$$

这时，可以从上述特征矢量组的某个线性组合出发来进行摄动，即设

$$X_{0i} = Xa$$

其中 $a \equiv [a_1 \cdots a_s]^{\mathrm{T}}$ 为待定的常数列阵。于是，特征值 $\lambda_i$ 的一阶摄动 $\lambda_{1i}$ 可由下述特征值问题求得

$$[X^{\mathrm{T}}(K_1 + \lambda_{0i} M_1) X - \lambda_{1i} I] a = 0 \tag{5.10.11}$$

**例 5.10.1**　设原系统质量矩阵为 $M_0 = I$，刚度矩阵为

$$K_0 = \begin{bmatrix} 2.5 & -1.0 & 0 \\ -1.0 & 5.0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 10 \end{bmatrix}$$

修改后，质量矩阵保持不变，而刚度矩阵变为

$$K = \begin{bmatrix} 2.6 & -1.1 & 0 \\ -1.1 & 5.2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 10 \end{bmatrix}$$

求修改后系统特征值与特征矢量的一阶摄动。

**解**　原系统的特征值与归一化特征矢量可求得为

$$\lambda_{01} = 2.119\,32, \quad \lambda_{02} = 5, \quad \lambda_{03} = 10.380\,68$$

$$\boldsymbol{X}_{01} = [0.932\,67 \quad 0.355\,05 \quad 0.063\,72]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{X}_{02} = [0.359\,21 \quad -0.898\,03 \quad -0.254\,00]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{X}_{03} = [0.032\,97 \quad -0.259\,79 \quad 0.965\,10]^{\mathrm{T}}$$

由题设

$$\varepsilon \boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由式(5.10.6),可得修改后系统特征值的一阶摄动为

$$\varepsilon\lambda_{11} = \boldsymbol{X}_{01}^{\mathrm{T}} \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{X}_{01} = 0.045\,97$$
$$\varepsilon\lambda_{12} = \boldsymbol{X}_{02}^{\mathrm{T}} \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{X}_{02} = 0.238\,71$$
$$\varepsilon\lambda_{13} = \boldsymbol{X}_{03}^{\mathrm{T}} \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{X}_{03} = 0.015\,32$$

为求特征矢量的一阶摄动,先求出各个 $\alpha_{ik}$ 如下

$$\alpha_{12} = -\alpha_{21} = (\lambda_{01} - \lambda_{02})^{-1} \boldsymbol{X}_{02}^{\mathrm{T}} \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{X}_{01} = -0.014\,14$$
$$\alpha_{13} = -\alpha_{31} = (\lambda_{01} - \lambda_{03})^{-1} \boldsymbol{X}_{03}^{\mathrm{T}} \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{X}_{01} = -0.000\,93$$
$$\alpha_{23} = -\alpha_{32} = (\lambda_{02} - \lambda_{03})^{-1} \boldsymbol{X}_{03}^{\mathrm{T}} \varepsilon \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{X}_{02} = -0.011\,18$$

由式(5.10.5)可得各特征矢量的一阶摄动为

$$\varepsilon \boldsymbol{X}_{11} = [-0.005\,11 \quad 0.012\,94 \quad 0.002\,69]^{\mathrm{T}}$$
$$\varepsilon \boldsymbol{X}_{12} = [0.012\,82 \quad 0.007\,92 \quad -0.009\,89]^{\mathrm{T}}$$
$$\varepsilon \boldsymbol{X}_{13} = [0.004\,88 \quad -0.009\,71 \quad -0.002\,78]^{\mathrm{T}}$$

因而,修改后系统特征值与特征矢量的一阶近似分别为

$$\lambda_1 = 2.165\,29, \quad \lambda_2 = 5.238\,71, \quad \lambda_3 = 10.396\,0$$
$$\boldsymbol{X}_1 = [0.927\,47 \quad 0.367\,95 \quad 0.066\,40]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{X}_2 = [0.371\,97 \quad -0.889\,96 \quad -0.263\,84]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{X}_3 = [0.037\,85 \quad -0.299\,48 \quad 0.962\,26]^{\mathrm{T}}$$

已知修改后系统特征值与特征矢量的准确解为

$$\lambda_1 = 2.164\,75, \quad \lambda_2 = 5.238\,55 \quad \lambda_3 = 10.396\,8$$
$$\boldsymbol{X}_1 = [0.927\,81 \quad 0.367\,12 \quad 0.066\,26]^{\mathrm{T}}$$

$$X_2 = [0.371\,10 \quad -0.890\,16 \quad -0.264\,39]^{\mathrm{T}}$$

$$X_3 = [0.038\,08 \quad -0.269\,89 \quad 0.962\,14]^{\mathrm{T}}$$

比较上述准确解与一阶近似解，可见在本例中一阶摄动法的结果还是相当满意的。

2. 特征灵敏度分析

特征灵敏度是指系统模态参数随系统物理参数 $s$ 的变化率。设系统的自由振动微分方程可表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = 0$$

$\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 假设是对称矩阵，其中包含系统的各个物理参数。为书写简便，引入特征矩阵 $\boldsymbol{D}$，其为

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{K} - \lambda\boldsymbol{M}$$

于是，主振型方程可写成

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{X} = 0$$

记

$$\boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{K}_i - \lambda_i\boldsymbol{M}$$

则有

$$\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{X}_i = 0 \tag{5.10.12}$$

对上式前乘以 $\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}$，得

$$\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{X}_i = 0$$

上式对物理参数 $s$ 求偏导数，可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}}{\partial s}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{D}_i}{\partial s}\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_i\frac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial s} = 0$$

注意到

$$\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_i = 0$$

故有

$$\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{D}_i}{\partial s}\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial s} - \lambda_i\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial s}\boldsymbol{M}\right\}\boldsymbol{X}_i = 0$$

于是，对于归一化振型 $\boldsymbol{X}_i$，有

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial s} = \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial s} - \lambda_i \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s}\right\}\boldsymbol{X}_i \tag{5.10.13}$$

这就是系统特征值随 $s$ 变化的灵敏度公式。直接对式(5.10.12)求导数，可得

$$\boldsymbol{D}_i \frac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial s} = -\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial s}\boldsymbol{X}_i$$

从上式出发，不难推得特征矢量的灵敏度公式

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial s} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{X}_j \tag{5.10.14}$$

其中

$$c_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)^{-1}\boldsymbol{X}_j^{\mathrm{T}}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial s} - \lambda_i \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s}\right\}\boldsymbol{X}_i, \quad i \neq j$$

$$c_{ii} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s}\boldsymbol{X}_i$$

或写成矩阵形式，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial s} = \boldsymbol{A}[c_{ij}]^{\mathrm{T}} \tag{5.10.14a}$$

在许多情形下，刚度矩阵与质量矩阵难以表示为物理参数 $s$ 的显函数。因此，人们常把特征灵敏度的微分公式改成近似的摄动公式。设对应于物理参数的变化 $\Delta s$，系统刚度矩阵与质量矩阵的变化为 $\Delta\boldsymbol{K}$ 与 $\Delta\boldsymbol{M}$；而由此引起的特征值与特征矢量的摄动分别为 $\Delta\lambda_i$ 与 $\Delta\boldsymbol{X}_i$，则系统的特征灵敏度公式可近似为

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial s} \approx \frac{\Delta\lambda_i}{\Delta s}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{X}_i}{\partial s} \approx \frac{\Delta \boldsymbol{X}_i}{\Delta s} \tag{5.10.15}$$

其中 $\Delta\lambda_i$ 与 $\Delta\boldsymbol{X}_i$ 可按前述摄动公式来计算。

**例 5.10.2**　考察图 5.10.1 所示由多个质量与弹簧串联而成的无阻尼振动系统。试求系统特征值的灵敏度。

**解**　串联系统的特点是质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为对角阵，而刚度矩阵为三对角阵。即有

$$\boldsymbol{M} = \mathrm{diag}[m_i]$$

$$\boldsymbol{K} = \mathrm{trid}[k_{ij}]$$

其中

$$k_{ii} = k_{i-1} + k_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

$$k_{i,i+1} = k_{i+1,i} = -k_i, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

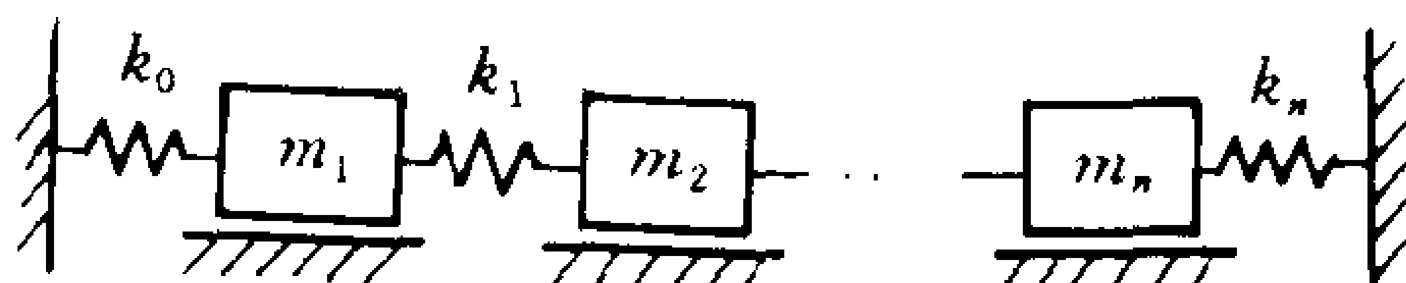



图 5.10.1　串联弹簧、质量系统

这时，系统的物理参数 $m_i$ 仅包含在质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 内，而 $k_i$ 仅包含在刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 内。故有

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial k_i} = \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial m_i} = 0$$

且有

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial m_j} = \mathrm{diag}[\delta_{ij}]$$

以及

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial k_j} = \mathrm{trid}[\rho_{ij}]$$

其中

$$\rho_{jj} = \rho_{j+1,j+1} = 1, \quad \rho_{j,j+1} = \rho_{j+1,j} = -1$$

其余 $\rho_{ij}$ 均为零。

由此可得

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial m_j} = -X_{ji}^2 \lambda_i, \quad j = 1, \cdots, n$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial k_0} = X_{1i}^2, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial k_n} = X_{ni}^2$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial k_j} = (X_{ji} - X_{j+1,i})^2, \quad j = 1, \cdots, n-1$$

可见，串联系统仍保持着1自由度系统的如下特性：增大质量将降低系统的固有频率，而增大刚度则会提高系统的固有频率。实际上，这也是一般的多自由度振动系统的固有属性。

### 5.10.2 复模态摄动问题[①]

复模态摄动问题通常是从状态变量系统出发进行讨论的。设有 $n$ 自由度线性系统

$$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{5.10.16}$$

在非对称、非经典阻尼情形下，$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{k}$ 都是一般的 $n \times n$ 阶实矩阵，其中 $\boldsymbol{m}$ 假设为正定的。通过引入状态变量

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix}$$

系统(5.10.16)可化为关于 $\boldsymbol{x}$ 的 $N(=2n)$ 阶状态变量系统

$$\boldsymbol{M}_0\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x} = 0 \tag{5.10.17}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{m} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{k} \end{bmatrix}$$

系统(5.10.17)的特征值问题可表示为

$$\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x} \tag{5.10.18}$$

由此可确定 $N$ 个特征值 $\lambda_{0i}$ 与 $N$ 个右特征矢量 $\boldsymbol{x}_{0i}$，它们一般都是复的，各个 $\boldsymbol{x}_{0i}$ 可规范化为

$$\boldsymbol{x}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{0i} = 1, \quad i = 1, \cdots, N \tag{5.10.19}$$

确定系统左特征矢量的伴随特征值问题可表示为

$$\boldsymbol{K}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{M}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \tag{5.10.20}$$

式(5.10.20)与式(5.10.18)具有公共的特征值，不过特征矢量将

---

① 刘济科，张宪民，孟光. 对复模态矩阵摄动法的补充. 航空动力学报，1996，11(1)：97～99

有所不同。由式(5.10.20)可确定 $N$ 个左特征矢量 $\boldsymbol{y}_{0i}$。5.4 节中已经提到,上述左、右特征矢量之间存在着互正交关系

$$\boldsymbol{y}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}_{0j} = \delta_{ij}, \quad \boldsymbol{y}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x}_{0j} = \lambda_{0i}\delta_{ij} \tag{5.10.21}$$

当系统参数发生变化时,$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{k}$ 将有所变化,从而 $\boldsymbol{M}_0$ 与 $\boldsymbol{K}_0$ 也有相应的变化。现设 $\boldsymbol{M}_0$ 与 $\boldsymbol{K}_0$ 的变化量(摄动)分别为 $\varepsilon\boldsymbol{M}_1$ 与 $\varepsilon\boldsymbol{K}_1$,其中 $\varepsilon$ 是小参数。于是,摄动系统的左、右特征值问题可表示为

$$(\boldsymbol{K}_0 + \varepsilon\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{M}_0 + \varepsilon\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{x} \tag{5.10.22}$$

$$(\boldsymbol{K}_0 + \varepsilon\boldsymbol{K}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{M}_0 + \varepsilon\boldsymbol{M}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \tag{5.10.23}$$

对应于第 $i$ 阶复模态,摄动系统的公共特征值记为 $\lambda_i$,而左、右特征矢量分别记为 $\boldsymbol{x}_i$ 与 $\boldsymbol{y}_i$。

暂先讨论原系统的各个 $\lambda_{0i}$ 各不相等的情形。这时,摄动系统的特征值与特征矢量可表示成如下幂级数形式

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \varepsilon\lambda_{1i} + \cdots \tag{5.10.24}$$

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_{0i} + \varepsilon\boldsymbol{x}_{1i} + \cdots \tag{5.10.25}$$

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}_{0i} + \varepsilon\boldsymbol{y}_{1i} + \cdots \tag{5.10.26}$$

将式(5.10.24)与式(5.10.25)代入式(5.10.22),比较 $\varepsilon$ 的同次幂系数,可得

$$\varepsilon^0: \quad \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x}_{0i} = \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}_{0i} \tag{5.10.27}$$

$$\varepsilon^1: \quad \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x}_{1i} + \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{x}_{0i} = \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}_{1i} + \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_{0i} + \lambda_{1i}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}_{0i} \tag{5.10.28}$$

$$\vdots$$

同理,将式(5.10.24)与式(5.10.26)代入式(5.10.23),可得

$$\varepsilon^0: \quad \boldsymbol{K}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_{0i} = \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_{0i} \tag{5.10.29}$$

$$\varepsilon^1: \quad \boldsymbol{K}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_{1i} + \boldsymbol{K}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_{0i} = \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_{1i} + \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_{0i} + \lambda_{1i}\boldsymbol{M}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_{0i} \tag{5.10.30}$$

$$\vdots$$

相应于式(5.10.19),摄动系统的右特征矢量可规范化为

$$\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_i = 1, \quad i = 1, \cdots, N \tag{5.10.31}$$

将式(5.10.25)代入上式,比较同次幂系数,可得

$$\varepsilon^0: \quad \boldsymbol{x}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{0i} = 1$$

$$\varepsilon': \quad \boldsymbol{x}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{0i} + \boldsymbol{x}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{1i} = 0 \tag{5.10.32}$$

$$\vdots$$

注意,式(5.10.32)中 $\boldsymbol{x}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{0i}$ 是一个数,由此可得

$$\boldsymbol{x}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{0i} = 0 \tag{5.20.33}$$

摄动系统的左、右特征矢量满足如下互正交条件

$$\boldsymbol{y}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_0 + \varepsilon\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{x}_j = \delta_{ij} \tag{5.10.34}$$

将式(5.10.25)与式(5.10.26)代入上式,可得

$$\varepsilon^{\circ}: \quad \boldsymbol{y}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}_{0i} = 1$$

$$\varepsilon': \quad \boldsymbol{y}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}_{1i} + \boldsymbol{y}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}_{0i} + \boldsymbol{y}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_{0i} = 0 \tag{5.10.35}$$

$$\vdots$$

以上得到了进行一阶摄动分析所需的基本方程。

考虑到,摄动系统右特征矢量的一阶摄动可表示为原系统右特征矢量的线性组合,即有

$$\boldsymbol{x}_{1i} = \sum_{k=1}^{N} c_{ik}\boldsymbol{x}_{0k}, \quad i = 1, \cdots, N \tag{5.10.36}$$

对上式前乘以 $\boldsymbol{x}_{0i}^{\mathrm{T}}$,并注意到式(5.10.33),可推得上式各待定系数存在着如下关系式

$$c_{ii} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} c_{ik}\boldsymbol{x}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{0k} \tag{5.10.37}$$

因此,式(5.10.36)中实际上只有 $N(N-1)$ 个系数待定。

将式(5.10.36)代入式(5.10.28),可得

$$(\boldsymbol{K}_0 - \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_0)\sum_{k=1}^{N} c_{ik}\boldsymbol{x}_{0k} = -(\boldsymbol{K}_1 - \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{x}_{0i} + \lambda_{1i}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}_{0i}$$

用 $\boldsymbol{y}_{0j}^{\mathrm{T}}$ 前乘上式,并利用互正交关系式(5.10.21),可得

$$c_{ij}(\lambda_{0j} - \lambda_{0i}) + \boldsymbol{y}_{0j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_1 - \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{x}_{0i} = \lambda_{1i}\delta_{ij}$$

上式中,当 $i = j$ 时,可导出特征值的一阶摄动公式

$$\lambda_{1i} = \boldsymbol{y}_{0i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_1 - \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{x}_{0i}, \quad i = 1, \cdots, N \tag{5.10.38}$$

当 $i \neq j$ 时,可导出右特征矢量的一阶摄动公式

$$c_{ij} = (\lambda_{0i} - \lambda_{0j})^{-1}\boldsymbol{y}_{0j}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_1 - \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{x}_{0i},$$

$$i \neq j, \quad i, j = 1, \cdots, N \tag{5.10.39}$$

而各个 $c_{ii}$ 则由式(5.10.37)确定。

类似地，摄动系统左特征矢量的一阶摄动可表示为原系统左特征矢量的线性组合，即有

$$\boldsymbol{y}_{1i}^{\mathrm{T}} = \sum_{k=1}^{N} d_{ik}\boldsymbol{y}_{0k}^{\mathrm{T}} \tag{5.10.40}$$

对上式后乘以 $\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}_{0i}$，并利用(5.10.21)，可得

$$d_{ii} = \boldsymbol{y}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}_{0i}$$

对式(5.10.36)前乘以 $\boldsymbol{y}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0$，可得

$$c_{ii} = \boldsymbol{y}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}_{0i}$$

将上二式代入式(5.10.35)，可得

$$d_{ii} = - c_{ii} - \boldsymbol{y}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{x}_{0i} \tag{5.10.41}$$

由此可确定各个 $d_{ii}$。

将式(5.10.30)转置后，再用式(5.10.40)代入，可得

$$\sum_{k=1}^{N} d_{ik}\boldsymbol{y}_{0k}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_0 - \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_0) + \boldsymbol{y}_{0i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_1 - \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_1) = \lambda_{1i}\boldsymbol{y}_{0i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_0$$

上式后乘以 $\boldsymbol{x}_{0j}$，并利用(5.10.21)，可得

$$d_{ij}(\lambda_{0j} - \lambda_{0i}) + \boldsymbol{y}_{0i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_1 - \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{x}_{0j} = \lambda_{1i}\delta_{ij}$$

上式中，当 $i = j$ 时，再次得到特征值的一阶摄动公式，它与式(5.10.38)是一致的。当 $i \neq j$ 时，可导出左特征矢量的一阶摄动公式

$$d_{ij} = (\lambda_{0j} - \lambda_{0i})^{-1}\boldsymbol{y}_{0i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_1 - \lambda_{0i}\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{x}_{0j},$$

$$i \neq j, \quad i, j = 1, \cdots, N \tag{5.10.42}$$

而各个 $d_{ii}$ 则由式(5.10.41)确定。

以上仅导出了复模态的一阶摄动公式。类似地可以导出二阶与二阶以上的摄动公式。

以上讨论中还假设了原系统的特征值各不相同。对于非亏损

系统而有重特征值的情形，可以参照相应情形下实模态分析的做法，即从重特征值所对应的一组复特征矢量的线性组合出发进行摄动分析。

**例 5.10.3** 设有1自由度线性阻尼系统，其自由振动微分方程可表示为

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

引入状态变量 $\boldsymbol{x} = [\dot{u} \quad u]^{\mathrm{T}}$，上式可化为

$$\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_0 = \begin{bmatrix} -c & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_0 = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

现取 $m = k = 1, c = 0.5$。仅假设刚度发生摄动，并取 $\varepsilon k = 0.1$，进行特征值与特征矢量摄动计算。

**解** 原系统的特征解如表5.10.1所示。用上述方法所得一阶摄动解，连同QR法的数值解，一起列于表5.10.2中。从对比结果可以看到，本例中所得一阶摄动解已具有很好的精度。

**表 5.10.1 原系统的特征解**

| 特征值 | − 0.25 + 0.968 246 j | − 0.25 − 0.968 246 j |
| --- | --- | --- |
| 右特征矢量 | − 1.118 03 + 0.866 03 j<br>1.118 03 + 0.866 03 j | − 1.118 03 − 0.866 03 j<br>1.118 03 − 0.866 03 j |
| 左特征矢量 | − 0.223 607 − 0.288 68 j<br>0.223 607 − 0.288 68 j | − 0.223 607 + 0.288 68 j<br>0.223 607 + 0.288 68 j |

表 5.10.2　摄动系统的计算结果对比

| | QR 法 | 一阶摄动解 |
|---|---|---|
| 特征值 | $-0.25 \pm 1.018\,577\,\mathrm{j}$ | $-0.25 \pm 1.019\,886\,\mathrm{j}$ |
| 右特征矢量 | $-1.237\,16 \pm 0.791\,65\,\mathrm{j}$<br>$1.014\,23 \pm 0.965\,66\,\mathrm{j}$ | $-1.252\,20 \pm 0.808\,29\,\mathrm{j}$<br>$1.028\,59 \pm 0.981\,50\,\mathrm{j}$ |
| 左特征矢量 | $-0.241\,71 \mp 0.253\,86\,\mathrm{j}$<br>$0.198\,15 \mp 0.309\,66\,\mathrm{j}$ | $-0.241\,50 \mp 0.250\,19\,\mathrm{j}$<br>$0.196\,77 \mp 0.307\,92\,\mathrm{j}$ |

## 5.11　假设模态法

假设模态法是指那些利用假设振型来求系统近似特征值的方法。

### 5.11.1　瑞利(Rayleigh)法

5.9 节中曾提到过瑞利商的概念，它的又一个实际应用是用来估算系统的基本频率，即一阶固有频率。对于质量矩阵为 $\boldsymbol{M}$，刚度矩阵为 $\boldsymbol{K}$ 的无阻尼多自由度系统，瑞利商可定义为

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}} \tag{5.11.1}$$

上式中当 $\boldsymbol{X}$ 取各阶主振型时，$\lambda$ 就给出相应的各个固有频率的平方值。所假设的振型与主振型愈接近，则瑞利商给出的固有频率近似值愈接近于真值。理论上，瑞利商可用来估算各阶固有频率；但实际上难于对高阶主振型作出合理的假设，故往往仅限于用来估算系统的基频。

当系统存在柔度矩阵 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{K}^{-1}$ 时，可引入另一种形式的瑞利商，即

$$\lambda' = \frac{X^T M X}{X^T M R M X} \tag{5.11.2}$$

它同样可用来估算系统的固有频率。可以证明[①]，对于任意的假设振型 $\boldsymbol{X}$，恒有

$$\lambda(\boldsymbol{X}) \geqslant \lambda'(\boldsymbol{X})$$

由于两种瑞利商给出的都是基频的上限估值，所以，后者要比前者给出更接近于真值的估计。

**例 5.11.1**　考察图 5.11.1 所示 3 自由度系统。求系统的基频估值。

**解**　系统的质量矩阵为

$$\boldsymbol{M} = m\boldsymbol{I}$$

图 5.11.1　3 自由度系统

刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与柔度矩阵 $\boldsymbol{R}$ 分别为

$$\boldsymbol{K} = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

现分别用两种瑞利商来估计系统的基频。取静变形曲线作为假设振型，即

$$\boldsymbol{X} = [3 \quad 5 \quad 6]^T$$

从而有

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} = 70\,m$$

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = 14\,k$$

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} = \frac{353m^2}{k}$$

由此可得

$$\lambda = 0.200\,k/m, \quad \lambda' = 0.198\,3\,\frac{k}{m}$$

① 季文美，方同，陈松淇．机械振动．北京：科学出版社，1985

此系统基频的真值，准确到 4 位数字，已知为

$$\lambda_1 = 0.1980\ k/m$$

这一结果验证了上述关于两种瑞利商的论断。

### 5.11.2　里兹(Ritz)法

里兹法克服了瑞利法在估算高阶固有频率时遇到的困难。里兹法不直接给出假设振型 $\boldsymbol{X}$，而是把它表示成若干个独立的假设基矢量的线性和，即设

$$\boldsymbol{X} = \sum_i a_i \psi_i$$

其中 $\psi_i$ 为假设基矢量，$a_i$ 为待定系数。将 $\boldsymbol{X}$ 代入瑞利商式，再用瑞利商取驻值的条件来确定系统固有频率的近似值以及相应的各个待定系数。这一过程实质上是在假设的基矢量下，来寻找最佳的拟合振型。只要各个基矢量取得合适，不仅可以得到相当好的基频拟合振型，而且可以得到较好的高频拟合振型。因此，这一方法不仅能够求得更为精确的基频估值，而且往往还能较好地估计系统的前几阶固有频率。

现假定已经对 $n$ 自由度振动系统的前 $s$ 阶主振型选定了 $s$ 个 $(s < n)$ 假设基矢量 $\psi_j$，$j = 1, \cdots, s$，令

$$\boldsymbol{X} = \sum_j a_j \psi_j \equiv \boldsymbol{\psi a} \tag{5.11.3}$$

其中，$\boldsymbol{\psi} \equiv [\psi_1 \cdots \psi_s]$ 为假设基矩阵，$\boldsymbol{a} \equiv [a_1 \cdots a_s]^{\mathrm{T}}$ 为待定系数列阵。再设系统的质量矩阵为 $\boldsymbol{M}$，刚度矩阵为 $\boldsymbol{K}$，它们都是 $n \times n$ 阶实对称阵。这时，系统的瑞利商可表示为

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\psi a}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi a}} \equiv \frac{U_1(\boldsymbol{a})}{T(\boldsymbol{a})} \tag{5.11.4}$$

由瑞利商的驻值性质，可从上式取驻值的条件来确定各个 $a_j$，即有

$$\frac{\partial U_1}{\partial a_j} - \lambda \frac{\partial T}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, \cdots, s$$

由此得

$$\boldsymbol{\psi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{\psi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{a}=0,\quad j=1,\cdots,s$$

或写成

$$[\boldsymbol{K}_0-\lambda\boldsymbol{M}_0]\boldsymbol{a}=0 \tag{5.11.5}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_0=\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\psi},\qquad \boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}$$

于是，问题又归结为矩阵特征值问题。所不同的是现在是 $s\times s$ 阶矩阵特征值问题，而不是原来的 $n\times n$ 阶矩阵特征值问题。一般 $s$ 远小于 $n$，所以，里兹法起着自由度缩聚的作用。

由缩聚系统(5.11.5)解得的 $s$ 个特征值即原系统前 $s$ 个特征值的近似值，而由所得的 $s$ 个特征矢量 $\boldsymbol{a}_j$，通过变换，可得原系统前 $s$ 阶近似主振型，即有

$$\boldsymbol{X}_j=\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{a}_j,\quad j=1,\cdots,s$$

不难验证，只要 $\boldsymbol{a}_j$ 是对 $\boldsymbol{M}_0$ 正交归一的，那末所得 $\boldsymbol{X}_j$ 对 $\boldsymbol{M}$ 也是正交归一的。

再设系统的柔度矩阵为 $\boldsymbol{R}$，从瑞利商 $\lambda'$ 出发，可得里兹特征值问题的另一形式，即有

$$\lambda'=\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{a}}\equiv\frac{T(\boldsymbol{a})}{U_2(\boldsymbol{a})} \tag{5.11.6}$$

由瑞利商 $\lambda'$ 取驻值的条件，有

$$\frac{\partial T}{\partial a_j}-\lambda'\frac{\partial U_2}{\partial a_j}=0,\quad j=1,\cdots,s$$

由此得

$$\boldsymbol{\psi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{a}-\lambda'\boldsymbol{\psi}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{a}=0,\quad j=1,\cdots,s$$

或写成

$$[\boldsymbol{M}_0-\lambda'\boldsymbol{R}_0]\boldsymbol{a}=0 \tag{5.11.7}$$

其中 $\boldsymbol{M}_0$ 同前，而

$$\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}$$

在介绍瑞利法时曾指出，有 $\lambda(\boldsymbol{X}) \geqslant \lambda'(\boldsymbol{X})$。所以，从同样的假设基出发，式(5.11.7)将比式(5.11.5)给出系统更为精确的近似固有频率。

**例 5.11.2**　考察图 5.11.2 所示由四个等质量 $m$ 与四个等刚度弹簧 $k$ 串联组成的系统。试用里兹法求系统的前二阶特征值及相应的主振型。

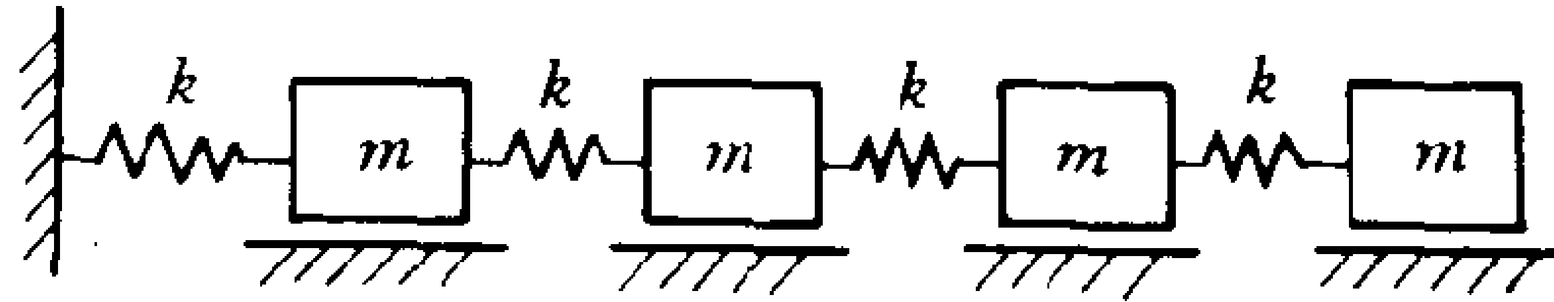



图 5.11.2　4 自由度系统

**解**　系统的质量矩阵为 $\boldsymbol{M} = m\boldsymbol{I}$，柔度矩阵与刚度矩阵分别为

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

假设基矢量取为

$$\psi_1 = [0.25 \quad 0.5 \quad 0.75 \quad 1]^{\mathrm{T}}$$
$$\psi_2 = [0 \quad 0.2 \quad 0.6 \quad 1]^{\mathrm{T}}$$

由此可得

$$\boldsymbol{M}_0 = m\begin{bmatrix} 1.875 & 1.55 \\ 1.55 & 1.40 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K}_0 = k\begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.36 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_0 = \frac{m^2}{k}\begin{bmatrix} 15.375 & 12.35 \\ 12.35 & 10.04 \end{bmatrix}$$

按式(5.11.5)，得

$$\begin{bmatrix} 0.25k - 1.875\lambda m & 0.25k - 1.55\lambda m \\ 0.25k - 1.55\lambda m & 0.36k - 1.40\lambda m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

由此解得

$$\lambda_1 = 0.123\,59\ k/m, \quad \left(\frac{a_1}{a_2}\right)_1 = -3.199\,9$$

$$\lambda_2 = 1\ k/m, \quad \left(\frac{a_1}{a_2}\right)_2 = -0.8$$

按式(5.11.7),得

$$\begin{bmatrix} 1.875 - \dfrac{15.375\lambda' m}{k} & 1.55 - \dfrac{12.35\lambda' m}{k} \\ 1.55 - \dfrac{12.35\lambda' m}{k} & 1.40 - \dfrac{10.04\lambda' m}{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

由此解得

$$\lambda_1' = 0.120\,75\ k/m, \quad \left(\frac{a_1}{a_2}\right)_1 = -3.199\,9$$

$$\lambda_2' = 1\ k/m, \quad \left(\frac{a_1}{a_2}\right)_1 = -0.8$$

可见,两种里兹法所得振型是一致的,由此得原系统的两个近似主振型为

$$\boldsymbol{X}_1 = [0.363\,64 \quad 0.636\,36 \quad 0.818\,18 \quad 1]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{X}_2 = [-1 \quad -1 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$$

不过,两种方法所得固有频率估值略有出入。这一系统的前两个特征值的准确值为

$$\lambda_1 = 0.120\,61\ k/m, \quad \lambda_2 = 1\ k/m$$

本例中,由于所取假设基矢量刚好可以构成系统的第二阶主振型,故两种里兹法都给出了原系统第二阶模态参数的准确解。

## 5.12 传递矩阵法

有相当广泛的一类工程系统,例如连续梁结构、汽轮发电机轴系、发动机螺旋桨轴系等,可以简化为由一系列弹性元件与惯性元

件组成的链式系统。这类系统的振动问题可以简便地利用传递矩阵的概念来列式求解。通常先将系统分解为若干个具有简单力学特性的二端元件，并且用传递矩阵来建立元件一端的广义力和广义位移与另一端的广义力和广义位移之间的联系。然后，再将各个元件逐个地连接起来，并建立系统的传递矩阵。最后，再进行振动分析。我们先用轴系的扭转振动分析来说明有关的概念与方法，然后推广到梁的弯曲振动分析。

### 5.12.1　轴系的扭转振动

设有图 5.12.1 所示轴系，它已经简化为多个刚性圆盘由弹性轴段连接而成的系统。刚性盘的转动惯量为 $J_i$，弹性轴段的扭转刚度为 $k_i$，而轴段的分布质量已不用考虑。

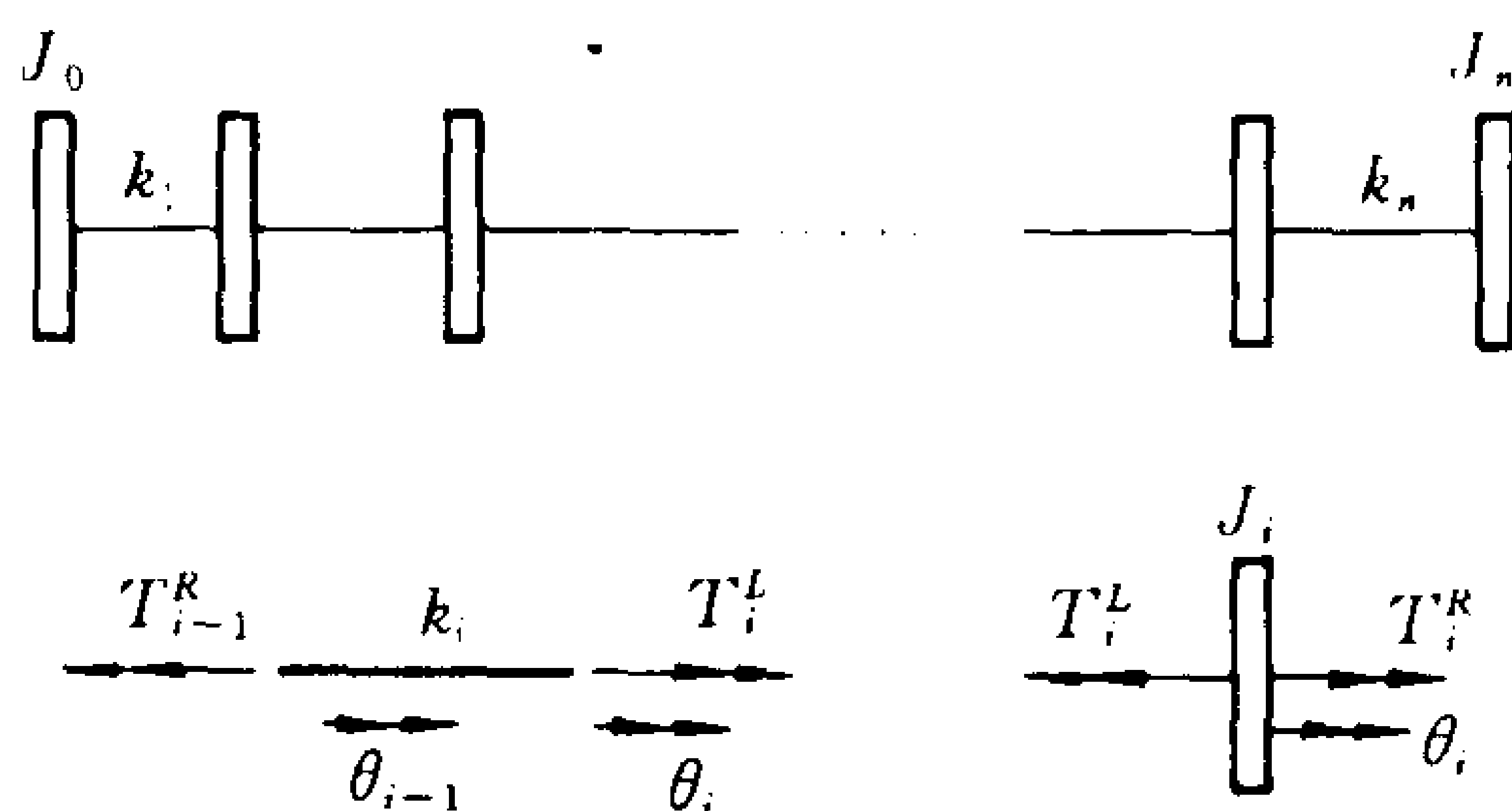



图 5.12.1　轴系模型

现约定：按右手法则来确定力矩矢与角位移矢；各盘右端的扭矩记为 $T_i^R$，其矩矢向右时为正；而各盘左端的扭矩记为 $T_i^L$，其矩矢向左时为正；至于各盘的角位移 $\theta$，一律按角位移矢向右为正。

这时，每个圆盘端面上的转角与扭矩可构成一个状态列阵，例如第 $i$ 个圆盘右端的状态列阵可表示为

$$\mathbf{z}_i^R = \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_i^R$$

而其左端的状态列阵可表示为

$$\mathbf{z}_i^L = \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_i^L$$

取第 $i$ 个圆盘作为分离体，有

$$J_i \ddot{\theta} = T_i^R - T_i^L$$

当轴系进行谐振动时，有

$$\ddot{\theta}_i = -\omega^2 \theta_i$$

故有

$$T_i^R = -J_i \omega^2 \theta_i + T_i^L$$

另一方面，刚性盘左、右端面的角位移总是相同的，即有

$$\theta_i = \theta_i^R = \theta_i^L$$

上述二式可写成如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -J_i\omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_i^L \equiv c_{ip} \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_i^L \qquad (5.12.1)$$

式中联系圆盘左、右端状态列阵的矩阵 $c_{ip}$ 称为**点矩阵**。

再取第 $i$ 个弹性轴段作为分离体。轴段左、右端的转角分别等于 $\theta_{i-1}^R$ 与 $\theta_i^L$，而两端的扭矩分别为 $T_{i-1}^R$ 与 $T_i^L$。故轴段左端的状态列阵为 $\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_{i-1}^R$，而右端的为 $\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_i^L$。由轴段的变形特性，有

$$\theta_i^L - \theta_{i-1}^R = \frac{T_{i-1}^R}{k_i}$$

又因不计轴段本身质量，有

$$T_i^L = T_{i-1}^R$$

以上二式可表示为

$$\begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_{i-1}^R \equiv c_{if} \begin{bmatrix} \theta \\ T \end{bmatrix}_{i-1}^R \qquad (5.12.2)$$

式中联系轴段两端状态列阵的矩阵 $c_{if}$ 称为**场矩阵**。

式(5.12.1)与式(5.12.2)合起来，有

$$\begin{bmatrix}\theta\\T\end{bmatrix}_i^R=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{1}{k_i}\\ -J_i\omega^2 & 1-\dfrac{J_i\omega^2}{k_i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\T\end{bmatrix}_{i-1}^R\equiv \boldsymbol{c}_i\begin{bmatrix}\theta\\T\end{bmatrix}_{i-1}^R \tag{5.12.3}$$

式中联系第 $i$ 个圆盘右端与第 $i-1$ 个圆盘右端状态列阵的矩阵 $\boldsymbol{c}_i$ 称为第 $i$ 个**子传递矩阵**。显然，轴系末端的状态列阵 $\boldsymbol{z}_n^R$ 与始端的状态列阵 $\boldsymbol{z}_0^L$ 之间有如下关系

$$\boldsymbol{z}_n^R=\boldsymbol{c}_n\boldsymbol{c}_{n-1}\cdots\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_{0p}\boldsymbol{z}_0^L\equiv\boldsymbol{c}\boldsymbol{z}_0^L \tag{5.12.4}$$

式中 $\boldsymbol{c}$ 称为系统的**总传递矩阵**。注意，各个 $\boldsymbol{c}_i$ 中的元素有依赖于 $\omega$ 的，故 $\boldsymbol{c}$ 的各个元素一般也依赖于 $\omega$，因而可表示为

$$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}c_{11}(\omega) & c_{12}(\omega)\\ c_{21}(\omega) & c_{22}(\omega)\end{bmatrix}$$

至于状态列阵 $z_n^R$ 与 $z_0^L$，则尚有赖于支承方式与外作用，即所谓边界条件。

这样，对应于某个 $\omega$ 值，从始端的状态列阵出发，按式(5.12.4)，算出末端的状态列阵。若能满足指定的边界条件，则该 $\omega$ 就是系统的一个固有频率。例如，两端自由的轴系在自由振动情形下，有

$$T_0^L=T_n^R=0$$

故有

$$\begin{aligned}\theta_n&=c_{11}(\omega)\theta_0\\ c_{21}(\omega)\theta_0&=0\end{aligned} \tag{5.12.5}$$

满足式(5.12.5)的各个 $\omega$ 就是系统的固有频率。

当图 5.12.1 中盘 $J_0$ 固定时，$\theta_0=0$，且有

$$\begin{bmatrix}\theta\\T\end{bmatrix}_n^R=\boldsymbol{c}_n\boldsymbol{c}_{n-1}\cdots\boldsymbol{c}_1\begin{bmatrix}\theta\\T\end{bmatrix}_0\equiv\boldsymbol{c}\begin{bmatrix}\theta\\T\end{bmatrix}_0$$

在自由振动情形下，有

$$T_n^R = 0$$

故有

$$\theta_n = c_{12}(\omega)T_0$$

$$c_{22}(\omega)T_0 = 0 \qquad (5.12.6)$$

式(5.12.5)中的$c_{21}(\omega)$与式(5.12.6)中的$c_{22}(\omega)$分别称为相应系统中的频率函数。

利用传递矩阵法计算系统固有频率与主振型的步骤如下：

(1) 选取某个$\omega$值，代入各个子传递矩阵$\boldsymbol{c}_i$(从$i = 0$开始)；

(2) 逐次左乘各个子矩阵，算出总传递矩阵$\boldsymbol{c}$；

(3) 如果相应的频率函数不等于零，则重新选取$\omega$值，重复上述步骤；

(4) 如果频率函数等于零，则该$\omega$就是系统的一个固有频率；

(5) 这时，用连乘中的各个中间矩阵左乘状态列阵$z_0$，可得各个(圆盘的)状态列阵，由此确定系统的主振型。

**例 5.12.1** 在图 5.12.1 所示轴系中，设$n = 3$，且有$J_1 = J_2 = J_3 = J$，$k_1 = k_2 = k_3 = k$，盘$J_0$固定。求轴系的固有频率及主振型。

**解** 本系统属重复结构，也称周期结构，各个子结构的传递矩阵均为

$$\boldsymbol{c}_i = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k} \\ -J\omega^2 & 1 - \dfrac{J\omega_2}{k} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

且有

$$\boldsymbol{z}_3^R = \boldsymbol{c}_3\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{z}_0$$

在实际计算过程中，有两处可以取巧。首先，在求$c_{22}(\omega)$时，由于各个中间矩阵与总传递矩阵的第一列元素都不起作用，所以根

本不用去算。其次，若把状态列阵表示成无量纲形式：$\tilde{\theta}=\theta$，$\tilde{T}=\frac{T}{k}$，则各个子传递矩阵也将无量纲化，即有

$$
\boldsymbol{c}_i=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{J\omega^2}{k} & 1-\frac{J\omega^2}{k} \end{bmatrix}
$$

因而可以从选定的无量纲值 $\alpha=\frac{J\omega^2}{k}$ 出发进行计算。由此得 $c_{22}(\alpha)$ 曲线，如图 5.12.2 所示。

图 5.12.2　$c_{22}(\alpha)$ 曲线

由此可得系统的固有频率的平方分别为

$$\omega_1^2=0.198\ k/J$$

$$\omega_2^2=1.555\ k/J$$

$$\omega_3^2=3.247\ k/J$$

分别取 $\alpha=0.198$，1.555 与 3.247，并取 $z_0=[0\quad 1]^{\mathrm{T}}$，可得系统的三个主振型分别为

$$\boldsymbol{X}_1=[1\quad 1.802\quad 2.247]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{X}_2=[1\quad 0.445\quad -0.802]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{X}_3=[1\quad -1.247\quad 0.555]^{\mathrm{T}}$$

**传动轴系**

图 5.12.3(*a*) 所示齿轮传动轴系，可简化为等效直列轴系，如图 5.12.3(*b*) 所示。

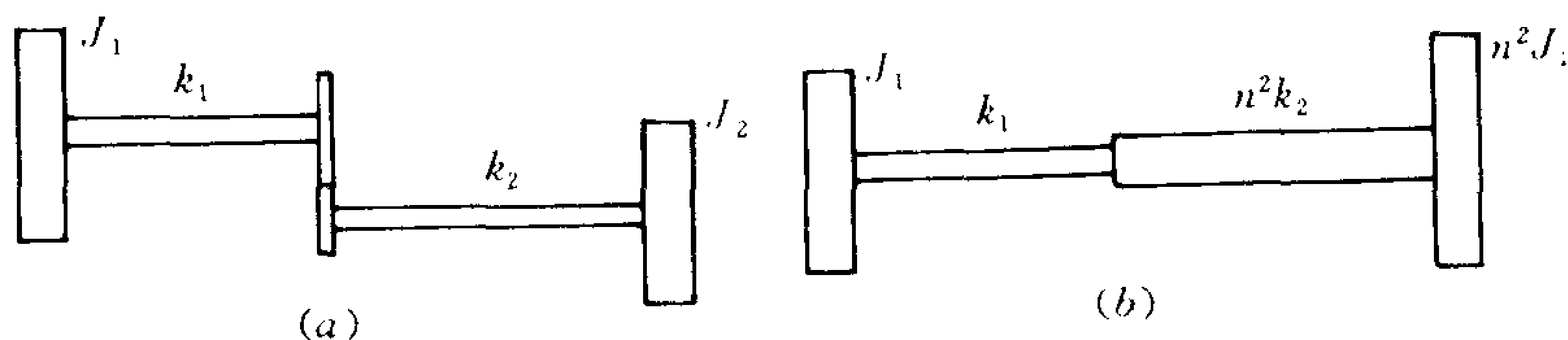



图 5.12.3　传动轴系

设齿轮系与轴本身的质量都可略去不计。再设轴 1 与轴 2 的转速比为 1∶$n$；于是，轴 2 的角速度为 $\dot{\theta}_2 = n\dot{\theta}_1$，故系统的总动能为

$$E_k = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2 n^2\dot{\theta}_1^2$$

因此，在简化系统中盘 2 的等效转动惯量可取为 $n^2J_2$。

轴 2 的等效刚度可确定如下。将盘 1 与盘 2 固定，在齿轮 1 上作用一扭矩，使齿轮 1 产生转角 $\theta_1$，这时齿轮 2 将产生转角 $\theta_2 = n\theta_1$，故系统的总弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2}k_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_2 n^2\theta_1^2$$

因此，在简化系统中轴 2 的等效刚度可取为 $n^2k_2$。

由此可得构成等效直列轴系的规则如下：设待简化轴相对于基准轴的转速比为 $n$，则可对待简化轴的刚度与盘的转动惯量分别乘以 $n^2$，即得相应的等效刚度与等效转动惯量。

**分支系统**

船舰推进系统、汽车差动传动轴系、轧钢机传动系统等一类工程结构，都可归结为分支系统。用上述传动轴系的简化方法，可将分支扭振系统简化为图 5.12.4 所示 1∶1 齿轮传动轴系。

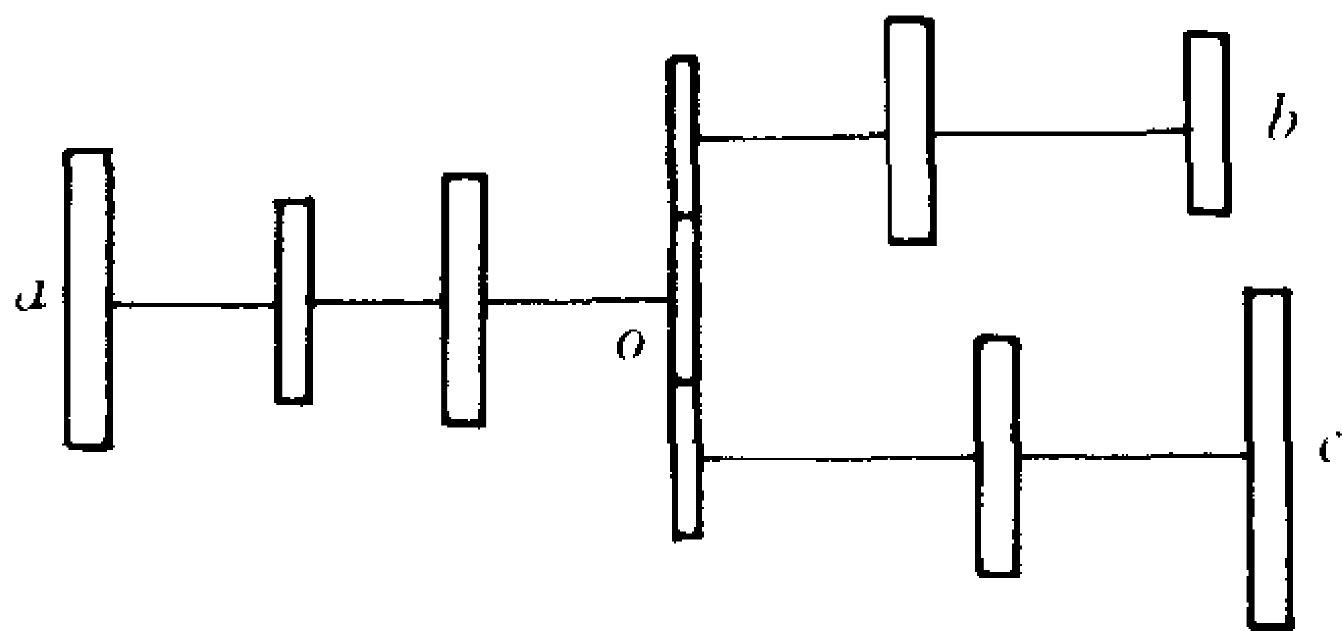



图 5.12.4　分支轴系

用下述方法，分支系统可按直列系统那样处理。取分支点为始端，并约定各分支轴的转角，当其角位移矢指向各自的末端时为

正。由等速传动条件，在始端有

$$\theta_{oa}=\theta_{ob}=\theta_{oc}=\theta_{o}$$

再设各分支轴在始端的扭矩分别为 $T_{oa}$、$T_{ob}$、$T_{oc}$，其正负仍按本小节开头的规定来取。由平衡条件，有

$$T_{oa}+T_{ob}+T_{oc}=0 \tag{5.12.7}$$

各分支轴末端的状态列阵可表示为

$$\boldsymbol{z}_a=\begin{bmatrix}\theta_a\\T_a\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{z}_b=\begin{bmatrix}\theta_b\\T_b\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{z}_c=\begin{bmatrix}\theta_c\\T_c\end{bmatrix}$$

而各分支轴的传递矩阵可分别表示为

$$\boldsymbol{A}=[A_{ij}]_{2\times 2},\quad \boldsymbol{B}=[B_{ij}]_{2\times 2},\quad \boldsymbol{C}=[C_{ij}]_{2\times 2}$$

于是有

$$\boldsymbol{z}_z=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\theta_o\\T_{oa}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{z}_b=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\theta_o\\T_{ob}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{z}_c=\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}\theta_o\\T_{oC}\end{bmatrix}$$

以上三式可合写成

$$\begin{bmatrix}\theta_a\\T_a\\\theta_b\\T_b\\\theta_c\\T_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&0&0\\A_{21}&A_{22}&0&0\\B_{11}&0&B_{12}&0\\B_{21}&0&B_{22}&0\\C_{11}&0&0&C_{12}\\C_{21}&0&0&C_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_o\\T_{oa}\\T_{ob}\\T_{oc}\end{bmatrix} \tag{5.12.8}$$

上式左端的状态列阵中有一半元素取决于边界条件。例如，对于自由端，扭矩为零；对于固定端，转角为零。对于图 5.12.4 所示系统，各分支轴末端均为自由端，故可从式(5.12.8) 取出各扭矩方程，并与式(5.12.7) 合起来，写成

$$\begin{bmatrix}T_a\\T_b\\T_c\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{21}&A_{22}&0&0\\B_{21}&0&B_{22}&0\\C_{21}&0&0&C_{22}\\0&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_o\\T_{oa}\\T_{ob}\\T_{oc}\end{bmatrix} \tag{5.12.9}$$

上式左端为 $\omega$ 的函数，其中满足指定边界条件

$$T_a = T_b = T_c = 0$$

的各个 $\omega$ 就是该分支系统的固有频率。注意，当上述条件得到满足时，方程(5.12.9)成为齐次方程。由齐次方程具有非零解的条件，可得系统的频率方程为

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ B_{21} & 0 & B_{22} & 0 \\ C_{21} & 0 & 0 & C_{22} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.12.10)$$

展开后得

$$\Delta(\omega) = A_{21}B_{22}C_{22} + B_{21}C_{22}A_{22} + C_{21}A_{22}B_{22} = 0 \qquad (5.12.10a)$$

$\Delta(\omega)$ 就是该分支系统的频率函数。作出 $\Delta(\omega)$ 对 $\omega$ 的关系曲线，就不难得出系统的各个固有频率。

### 5.12.2 梁的弯曲振动

传递矩阵法也可应用于梁结构的弯曲振动。只需将梁结构简化为带多个集中质量的弹性梁，梁本身的分布质量不再考虑，如图5.12.5所示。其解法与上述轴的扭振问题基本一样，不同的是梁的状态列阵共包括两个位移元素(挠度 $y$ 与转角 $\theta$)与两个力元素(剪力 $S$ 与弯矩 $M$)。即有

$$\boldsymbol{z} = [y \quad \theta \quad M \quad S]^{\mathrm{T}}$$

如图5.12.6所示，我们约定：$y$ 轴向上为正；梁右截面上的弯矩逆时针方向为正，剪力向下为正；左截面上的弯矩顺时针方向为正，剪力向上为正。

取集中质量 $m_i$ 作为分离体。由位移连续条件，有

$$y_i^R = y_i^L, \qquad \theta_i^R = \theta_i^L \qquad (5.12.11)$$

由平衡条件，有

$$M_i^R = M_i^L, \qquad S_i^R = S_i^L + m_i\omega^2 y_i \tag{5.12.12}$$

上二式可合并成如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix}_i^L \equiv c_{ip} z_i^L \tag{5.12.13}$$

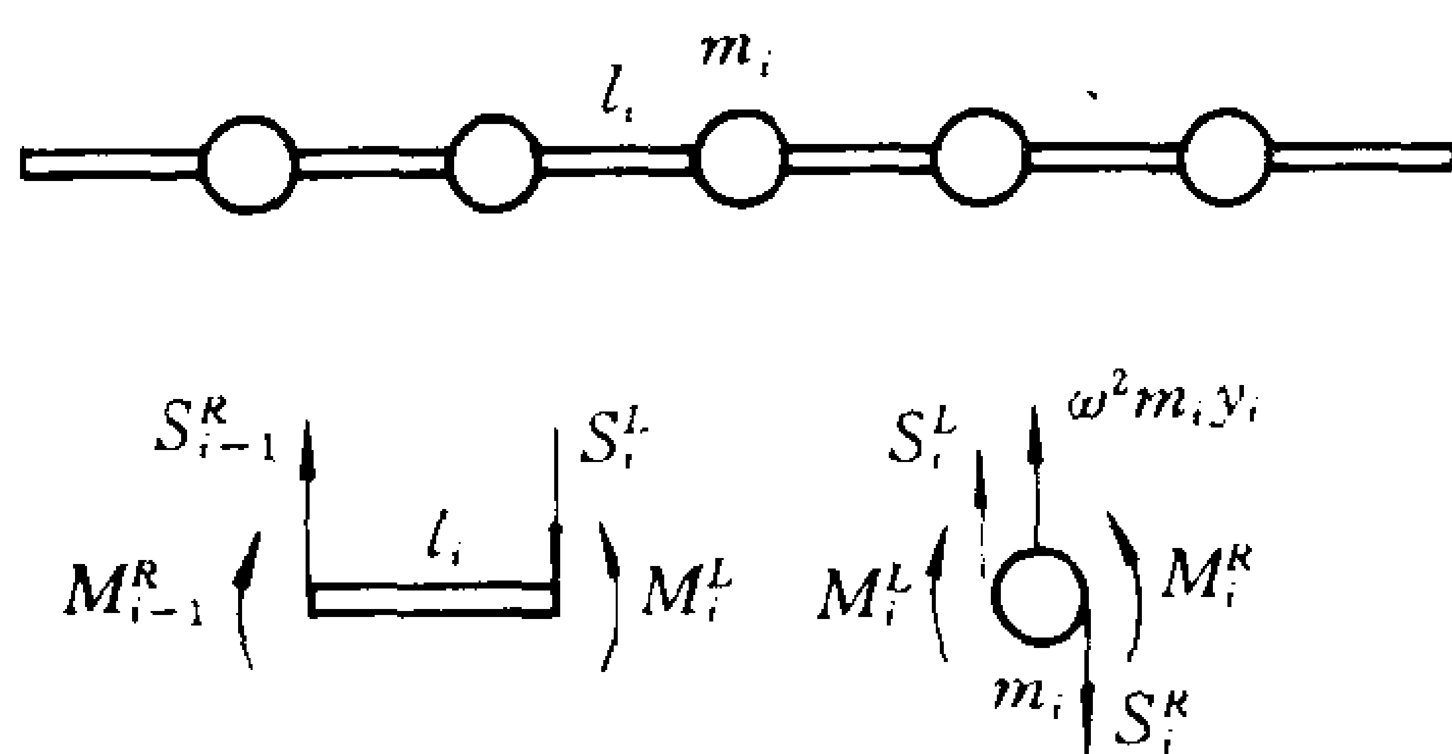



图 5.12.5　梁系模型

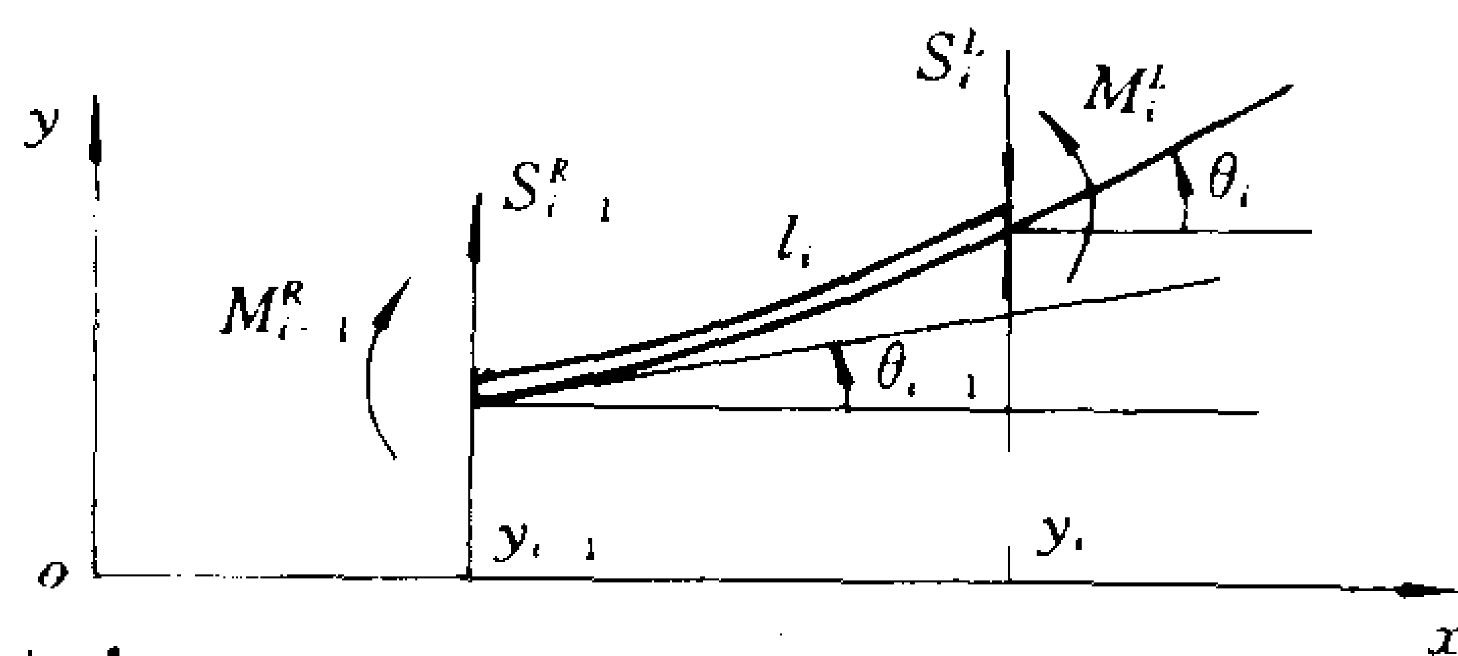



图 5.12.6　梁段分离体

取弹性梁段 $l_i$ 作为分离体。其右端状态列阵就等于 $z_i^L$，其左端状态列阵就等于 $z_{i-1}^R$。由平衡条件，有

$$S_i^L = S_{i-1}^R, \qquad M_i^L = l_i S_{i-1}^R + M_{i-1}^R \tag{5.12.14}$$

对于均匀梁段，其弯曲变形方程为

$$M = EI\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = EI\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$$

或写为

$$\theta = \frac{1}{EI}\int M\mathrm{d}x$$

因而有

$$\begin{aligned}\theta_i^L &= \theta_{i-1}^R + \frac{1}{EI}\int_0^{l_i}(M_{i-1}^R + S_{i-1}^R x)\mathrm{d}x \\ &= \theta_{i-1}^R + \frac{l_i M_{i-1}^R}{EI} + \frac{l_i^2 S_{i-1}^R}{2EI}\end{aligned} \tag{5.12.15}$$

又

$$y = \int\theta\mathrm{d}x$$

因而有

$$\begin{aligned}y_i^L &= y_{i-1}^R + \int_0^{l_i}\left(\theta_{i-1}^R + \frac{M_{i-1}^R x}{EI} + \frac{S_{i-1}^R x^2}{2EI}\right)\mathrm{d}x \\ &= y_{i-1}^R + l_i\theta_{i-1}^R + \frac{l_i^2 M_{i-1}^R}{2EI} + \frac{l_i^3 S_{i-1}^R}{6EI}\end{aligned} \tag{5.12.16}$$

式(5.12.14)～(5.12.16)可合写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & l_i & \dfrac{l_i^2}{2EI} & \dfrac{l_i^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \dfrac{l_i}{EI} & \dfrac{l_i^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix}_{i-1}^R \equiv \boldsymbol{c}_{if}\boldsymbol{z}_{i-1}^R \tag{5.12.17}$$

将式(5.12.13)与式(5.12.17)合起来，得

$$\boldsymbol{z}_i^R = \boldsymbol{c}_{ip}\boldsymbol{c}_{if}\boldsymbol{z}_{i-1}^R = \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{z}_{i-1}^R$$

其中

$$
\boldsymbol{c}_i = \begin{bmatrix} 1 & l_i & \dfrac{l_i^2}{2EI} & \dfrac{l_i^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \dfrac{l_i}{EI} & \dfrac{l_i^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ \omega^2 m_i & \omega^2 m_i l_i & \dfrac{\omega^2 m_i l_i^2}{2EI} & 1 + \dfrac{\omega^2 m_i l_i^3}{6EI} \end{bmatrix} \tag{5.12.18}
$$

对于图 5.12.5 所示系统，有

$$
\boldsymbol{z}_n^R = \boldsymbol{c}_n \boldsymbol{c}_{n-1} \cdots \boldsymbol{c}_1 \boldsymbol{z}_0 \equiv \boldsymbol{c}\boldsymbol{z}_0 \tag{5.12.19}
$$

其中总传递矩阵 $\boldsymbol{c}$ 为四阶方阵，记为

$$
\boldsymbol{c} \equiv [c_{ij}(\omega)]_{4\times 4}
$$

方程(5.12.19)两端的状态列阵中有一半元素取决于边界条件。满足指定边界条件的 $\omega$ 就是系统的固有频率。

对于简支梁，其边界条件为

$$
y_0 = y_n^R = M_0 = M_n^R = 0
$$

代入式(5.12.19)后，可得频率方程为

$$
\begin{vmatrix} c_{12} & c_{14} \\ c_{32} & c_{34} \end{vmatrix} = 0 \tag{5.12.20}
$$

对于两端固定的梁，其边界条件为

$$
\theta_0 = \theta_n^R = y_0 = y_n^R = 0
$$

得频率方程为

$$
\begin{vmatrix} c_{13} & c_{14} \\ c_{23} & c_{24} \end{vmatrix} = 0 \tag{5.12.21}
$$

对于悬臂梁，其边界条件为

$$
\theta_0 = y_0 = M_n^R = S_n^R = 0
$$

得频率方程为

$$
\begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} \\ c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{5.12.22}
$$

# 第六章　弹性体振动的精确解法

## 6.1　引　　言

前面各章在讨论振动问题时采用的都是集中参数模型，它只有有限多个自由度，且运动规律由常微分方程来确定。事实上，它只是现实问题中的一类力学模型。客观现实的另一类力学模型是弹性体(也称连续系统或分布参数系统)，它的物理参数是分布型的，具有无限多个自由度，且运动规律由偏微分方程来确定。

这两类模型尽管在自由度数目与微分方程形式上有所不同，但由于它们描述的都是振动现象，所以在许多方面有共同之处。在多自由度系统振动分析中所形成的一系列重要概念，在弹性体振动分析中都有相应的地位和发展。例如，在弹性体振动中系统固有频率的数目增大为无限多个；而主振型的概念发展为固有振型函数，而且这些振型函数之间也存在关于分布质量与刚度的加权正交性；在线性振动问题中，叠加原理以及建立在这一原理基础上的模态分析法、脉冲响应法、频率响应法等也同样适用于弹性体振动分析。

在考察实际振动问题时，究竟应该采用那一类力学模型，得根据具体对象作具体处理。例如，飞机蒙皮一般取为薄板模型，涡轮盘取为厚圆板模型，涡轮叶片则取为薄壳或厚壳模型等。又当考察振动体内弹性波的传播问题时，就得采用弹性体模型。

本章只讨论理想弹性体的振动。理想弹性体满足以下假设条件：① 匀质分布；② 各向同性；③ 服从虎克定律。通过对一些简单

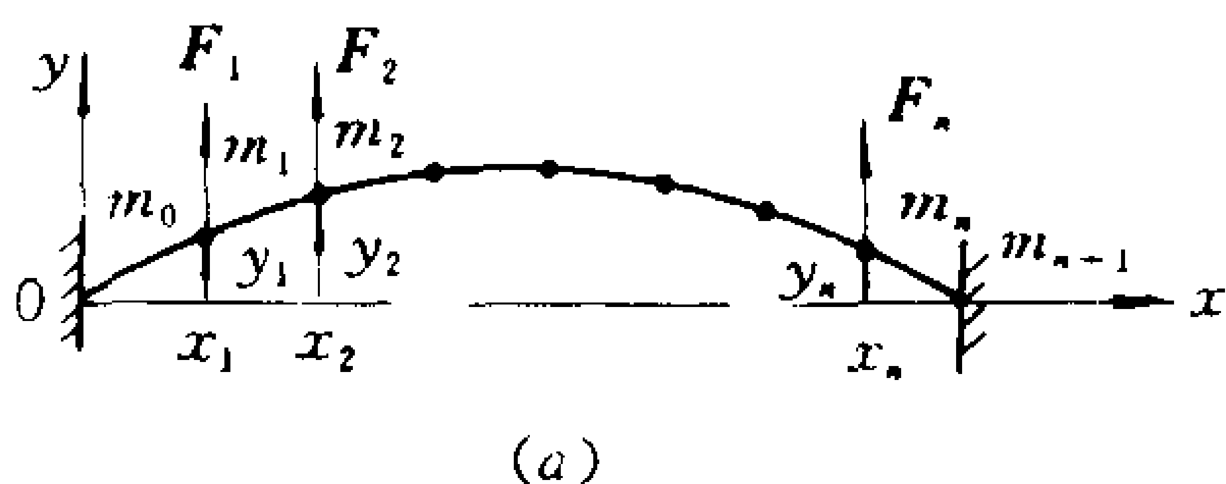
形状的弹性体的振动分析，着重说明弹性体振动的特点，弄清它与多自由度系统振动的共同点与不同点。

由于弹性体振动问题涉及求解相应的偏微分方程，因而只有在一些简单情形下才能找到解析形式的精确解。尽管实际问题往往是复杂的，很少能归结为这些简单情形；但了解这些简单情形下精确解的特征，对于处理复杂问题还是有帮助的。

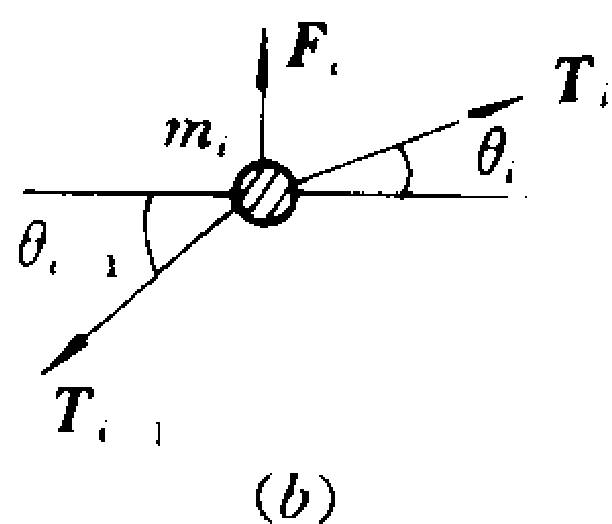
## 6.2　连续系统的最简情形——弦的横向振动

### 6.2.1　从多自由度系统到连续系统

考虑图 6.2.1(*a*) 所示弦的横向振动。将弦的质量集中成 $n+2$ 个质点，其质量分别为 $m_0$，$m_1,\cdots,m_{n+1}$，各质点分别位于 $x_0=0,x_1,\cdots,x_{n+1}=l$ 处，质点间由张力为 $T$ 的弦线连接。图中 $\boldsymbol{F}_i$ 表示各质点上的作用力。下面来推导此 $n$ 个自由度系统的运动微分方程。取第 $i$ 个质点为研究对象，其受力如图 6.2.1(*b*) 所示。根据牛顿第二定律，可列出质点横向振动的微分方程为



(*a*)



(*b*)

图 6.2.1　弦振动

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{y}_i &= T_i\sin\theta_i - T_{i-1}\sin\theta_{i-1} + F_i \\ 0 &= T_i\cos\theta_i - T_{i-1}\cos\theta_{i-1} \end{aligned}\right\} \tag{6.2.1}$$

且有

假定弦作微小振动，因而 $\sin\theta_i \doteq \tan\theta_i \doteq \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \dfrac{y_{i+1}-y_i}{l_i}$，$\sin\theta_{i-1}$

$\doteq \dfrac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{l_{i-1}}$, $\cos\theta_i \doteq 1$, $\cos\theta_{i-1} \doteq 1$，同时方程(6.2.1)中还考虑到$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = l_i$在微振动中保持不变。进一步简化方程(6.2.1)，可以得到$T_i = T_{i-1}$，即弦中张力可近似看做常量$T$，并且有

$$m_i\ddot{y}_i = T\frac{y_{i+1} - y_i}{l_i} - T\frac{y_i - y_{i-1}}{l_{i-1}} + F_i$$
$$i = 1,2,\cdots,n \tag{6.2.2}$$

在弦的两端有 $y_0 = y_{n+1} = 0$。

现将方程(6.2.2)写成矩阵形式，有

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F} \tag{6.2.3}$$

其中 $\boldsymbol{M} = \mathrm{diag}[m_i]$，$\boldsymbol{Y} = [y_1\ y_2\ \cdots\ y_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{F} = [F_1\ F_2\ \cdots\ F_n]^{\mathrm{T}}$，刚度矩阵$\boldsymbol{K}$为

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \frac{T}{l_1}+\frac{T}{l_0} & -\frac{T}{l_1} & 0 & 0 & 0 & & \cdots & \\ -\frac{T}{l_1} & \frac{T}{l_2}+\frac{T}{l_1} & -\frac{T}{l_2} & 0 & 0 & & \cdots & \\ 0 & -\frac{T}{l_2} & \frac{T}{l_2}+\frac{T}{l_3} & -\frac{T}{l_3} & 0 & & \cdots & \\ & & \cdots & & & & \cdots & \\ 0 & & \cdots & & & -\frac{T}{l_n} & \frac{T}{l_{n-2}}+\frac{T}{l_{n-1}} & -\frac{T}{l_{n-1}} \\ 0 & & \cdots & & & 0 & -\frac{T}{l_{n-1}} & \frac{T}{l_{n-1}}+\frac{T}{l_n} \end{bmatrix}$$

方程(6.2.3)可确定各质点的振动规律 $y_i(t)$。

方程(6.2.2)还可改写成

$$m_i\ddot{y}_i = T\Delta\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right) + F_i$$

将上式两端同除以 $\Delta x_i$，得

$$\frac{m_i}{\Delta x_i}\ddot{y}_i = T\frac{\Delta}{\Delta x_i}\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right) + \frac{F_i}{\Delta x_i} \tag{6.2.4}$$

随着质点数目 $n$ 的增加，质点间的距离 $\Delta x_i$ 越来越小，弦上各质点的位移 $y_i(t)$ 将趋于一连续函数 $y(x,t)$。同时，$\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{m_i}{\Delta x_i} = \rho$，$\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{F_i}{\Delta x_i} = p(x,t)$，而 $\rho$ 和 $p(x,t)$ 分别是弦上单位长度的质量和作用在弦上单位长度上的载荷。于是方程(6.2.4)将演化为一阶偏微分方程

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p(x,t) \tag{6.2.5}$$

其边界条件为 $y(0,t) = y(l,t) = 0$。

由以上分析可见，对连续体若用方程(6.2.3)来代替方程(6.2.5)，可近似确定系统在外激扰力作用下的响应，这种做法在实际问题中常常用到。若把弦作为连续系统，精确地确定系统的响应，则需求解偏微分方程(6.2.5)。

### 6.2.2 弦的振动微分方程及其自由振动

这里直接就连续体来推导弦作横向振动的微分方程。在图6.2.1($a$)中取出一微元段 $\mathrm{d}x$，其受力如图6.2.2所示。在弦作微小振动的假设下，有 $\sin\theta \doteq \tan\theta = \dfrac{\partial y}{\partial x}$，$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x$，考虑到微元段在水平方向的平衡，弦中张力可近似看成是常量 $T$。于是，微元段的运动微分方程为

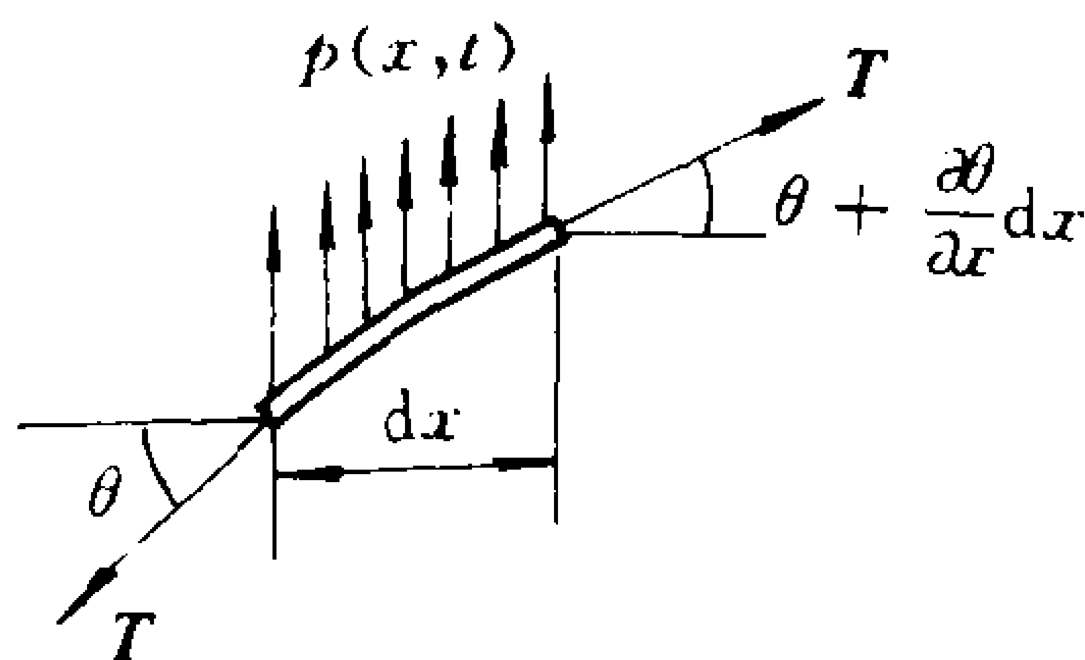



图6.2.2 弦的微元

$$\rho \mathrm{d}x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x}\mathrm{d}x\right) - T\theta - p(x,t)\mathrm{d}x$$

$$= T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x + p(x,t)\mathrm{d}x$$

整理后得到与方程(6.2.5)完全相同的形式。

下面仅仅讨论无阻尼自由振动的情形。此时 $p(x,t)=0$，于是方程(6.2.5)可写成

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{6.2.6}$$

其中 $c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$。方程(6.2.6)是弦作横向振动的运动微分方程，数学上称做一维波动方程，$c$ 就是波沿弦向的传播速度。

如给出系统的边界条件

$$y(0,t)=y(l,t)=0 \tag{6.2.7}$$

和初始条件

$$y(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=g(x) \tag{6.2.8}$$

那末方程(6.2.6)的解可表示成两种形式，一种是波动解，另一种是振动解。前者将弦的运动表示为

$$y(x,t)=f_1(x-ct)+f_2(x+ct)$$

即把弦的运动看成是由两个相同形式的反向行进波的叠加；而后者则将弦的运动表示成各横向同步运动的叠加，各点的振幅在空间按特定的模式分布。这两种解从不同的角度描述了弦的运动，各有其特点。波动解能形象直观地描述波动过程，给出任何时刻清晰的波形，但求解比较复杂；而振动解揭示了弦的运动由无穷多个简谐运动叠加而成。对特定的动力分析过程，选择什么形式的解要视实际问题的需要来决定。这既取决于扰动源的性质，又取决于所考虑物体的相对尺寸，同时还与所关心的问题等因素有关。在一般机械系统中，直接进行振动分析更为简单可行。下面就寻求方程(6.2.6)的振动解。

观察弦的自由振动可以发现，弦的运动呈现同步振动，即在运动中，弦的各点同时达到最大幅值，又同时通过平衡位置，而整个弦的振动形态不随时间而变化。用数学语言来说，描述弦振动的函数 $y(x,t)$ 可以分解为空间函数和时间函数的乘积，即

$$y(x,t)=X(x)Y(t) \tag{6.2.9}$$

其中 $X(x)$ 是振型函数，它描述了整个弦的振动形态，而 $Y(t)$ 描述了弦各点的振动规律。将式(6.2.9)代入方程(6.2.6)中，得到

$$c^2\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2}$$

上式左边仅是 $x$ 的函数，右边仅是 $t$ 的函数，所以要使上式对任意的 $x$、$t$ 都成立，只有两者都等于同一常数。设这一常数为 $\alpha$，有

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2}-\alpha Y=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\alpha}{c^2}X=0$$

只有当 $\alpha$ 为负数时，才能从上述第一个方程中确定振动运动。所以，取 $\alpha=-p^2$。于是，上述方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2}+p^2Y=0 \tag{6.2.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+\beta^2X=0,\quad \beta=\frac{p}{c} \tag{6.2.11}$$

方程(6.2.10)和(6.2.11)的解分别是

$$Y(t)=A\sin pt+B\cos pt \tag{6.2.12}$$

$$X(x)=C\sin\beta x+D\cos\beta x \tag{6.2.13}$$

其中 $A,B,C,D$ 为积分常数。另外由边界条件(6.2.7)，得

$$X(0)=0 \tag{6.2.14}$$

$$X(l)=0 \tag{6.2.15}$$

由条件(6.2.14)可得

$$D=0$$

而由条件(6.2.15)可得

$$\sin\beta l=0 \tag{6.2.16}$$

上式称做弦的**特征方程**。由此可确定一系列**特征值** $\beta_i$

$$\beta_i=\frac{i\pi}{l}\qquad i=1,2,\cdots \tag{6.2.17}$$

所以系统的各阶固有频率为

$$p_i = \frac{i\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad i = 1,2,\cdots \tag{6.2.18}$$

与其相应的**特征函数**，亦称**振型函数**为

$$X_i(x) = \sin\frac{i\pi x}{l} \qquad i = 1,2,\cdots \tag{6.2.19}$$

弦对应于各阶固有频率 $p_i$ 的主振动为

$$\begin{aligned} y_i(x,t) &= X_i(x)Y_i(t) \\ &= (A_i\sin p_it + B_i\cos p_it)\sin\frac{i\pi x}{l} \end{aligned} \tag{6.2.20}$$

弦的自由振动可以表示为各阶主振动的叠加，即有

$$y(x,t) = \sum(A_i\sin p_it + B_i\cos p_it)\sin\frac{i\pi x}{l} \tag{6.2.21}$$

其中 $A_i$，$B_i$ 由运动的初始条件确定。将初始条件(6.2.8)代入上式，有

$$f(x) = \sum B_i\sin\frac{i\pi x}{l}$$

$$g(x) = \sum A_ip_i\sin\frac{i\pi x}{l}$$

三角函数族具有正交性，即

$$\int_0^l \sin\frac{i\pi x}{l}\sin\frac{j\pi x}{l}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{l}{2}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

由此可得

$$B_i = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$A_i = \frac{1}{p_i}\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

由以上讨论可见，张紧弦的自由振动除了**基频**（最低频率 $p_1$）振动外，还可以包含频率为基频整数倍的振动，这种**倍频振动**亦称

**谐波振动**。在音乐上，正是这种频率之间的整数倍关系，使谐波与基波组成各种悦耳的谐音结构。像提琴、钢琴、吉他、二胡等乐器都是用弦的振动作为声源。弦的振动中基波起主要作用，各高阶谐波的出现取决于激励条件。出色的演奏家能够激发出合适的谐波，产生优美动听的声音。另外，由式(6.2.18)可见，调整弦支点间的跨度或弦的张力，可以校正弦的基本音调。

**例 6.2.1**　求图 6.2.1($a$)所示弦的前3阶固有频率和相应的振型函数。

**解**　将 $i = 1,2,3$ 分别代入式(6.2.18)和(6.2.19)中，有

$$p_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}},\ p_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}},\ p_3 = \frac{3\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

$$X_1(x) = \sin\frac{\pi x}{l},\ X_2(x) = \sin\frac{2\pi x}{l},\ X_3(x) = \sin\frac{3\pi x}{l}$$

系统的前 3 阶振型函数如图 6.2.3 所示。

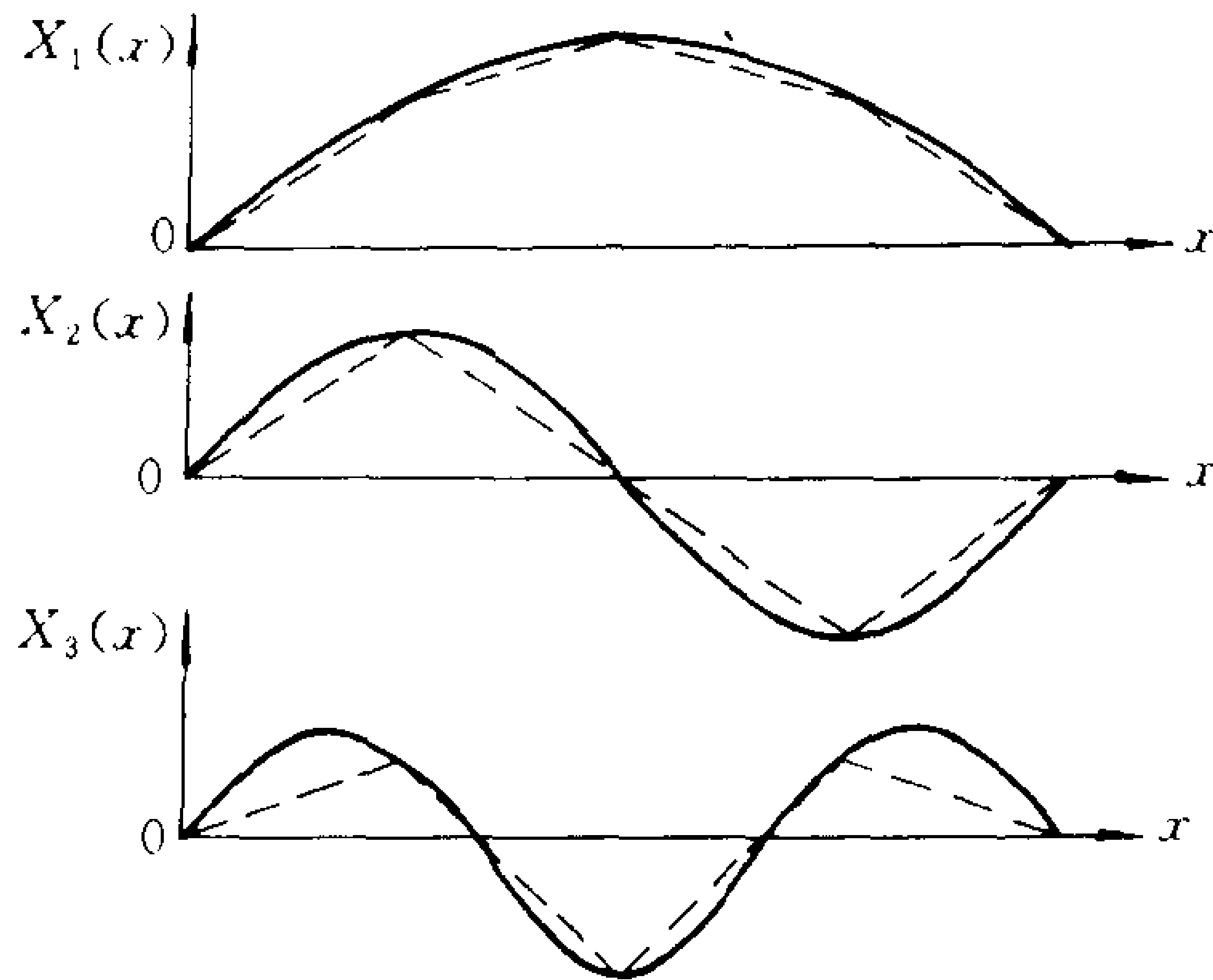



图 6.2.3　振型函数

**讨论**：

(1) 弦的各阶固有频率由低到高成倍增长，相应的波形的波数逐渐增多。振幅始终为零的点称为节点。节点数随振型阶数的增高而逐一增加。一般地说，第 $i$ 阶振型有 $i-1$ 个节点。

(2) 如果将弦缩聚成三自由度系统(如图 6.2.4 所示)，用离散系统的振动分析方法，可以得到系统的前 3 阶固有频率为

$$p_1=\frac{3.06}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}},\quad p_2=\frac{5.66}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}},\quad p_3=\frac{7.39}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

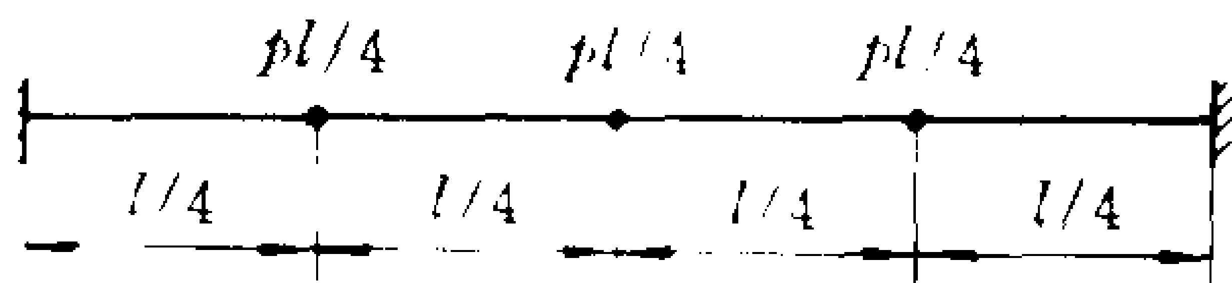



图 6.2.4 离散化模型

相应的前 3 阶主振型用虚线画在图 6.2.3 中。与弹性体分析的结果比较，基频的误差为 2.6%，一阶主振型也较好地接近一阶振型函数 $X_1(x)$，随着阶次的增高，误差增大。要提高计算精度，应增加离散系统的自由度数。当质点数目趋于无限大时，描述振动型态的主振型就趋于 $x$ 的连续函数，即连续系统的振型函数 $X(x)$。

图 6.2.5 初始状态

**例 6.2.2** 设张紧弦在初始时刻被拨到图 6.2.5 所示位置，然后无初速地释放，求弦的自由振动。

**解** 按题设，有

$$y(x,0)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{6h}{l}x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{l}{6}\\[2mm] \dfrac{6h}{5l}(l-x), & \dfrac{l}{6}\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x) = 0$$

故有

$$A_i = 0, \qquad i = 1,2,\cdots$$

$$B_i = \frac{12h}{l^2}\int_0^{l/b} x\sin\frac{i\pi x}{l}\mathrm{d}x + \frac{12h}{5l^2}\int_{l/b}^{l}(l-x)\sin\frac{i\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{72h}{5(i\pi)^2}\sin\frac{i\pi}{6}, \qquad i = 1,2,\cdots$$

因而弦的自由振动可确定为

$$y(x,t) = \frac{72h}{5\pi^2}\left\{\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\left(\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}t\right) + \frac{0.866}{4}\sin\frac{2\pi x}{l}\cos\left(\frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}t\right) + \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{l}\cos\left(\frac{3\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}t\right) + \frac{0.866}{16}\sin\frac{4\pi x}{l}\cos\left(\frac{4\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}t\right) + \cdots\right\}$$

本例中弦在 $l/6$ 处(三次谐波的波腹处)被拨动;尽管如此,基波的振幅约为三次谐波振幅的 4 倍。

## 6.3　导致一维波动方程的其它振动系统

工程中的许多问题,其运动微分方程都为一维波动方程。除了上节讨论的弦的横向振动外,还有声音的传播等问题。这里我们将讨论其中的两种情况,杆的纵向振动和轴的扭转振动。

### 6.3.1　杆的纵向振动

匀质等截面细直杆如图 6.3.1($a$) 所示。设杆长为 $l$,单位体积的质量为 $\rho$,横截面积为 $A$,材料的弹性模量为 $E$。讨论中还假定杆

的横截面在振动中始终保持为平面，并且略去杆的纵向伸缩而引起的横向变形，即同一横截面上各点仅在 $x$ 方向产生相等的位移。以 $u(x,t)$ 表示杆上距原点 $x$ 处在 $t$ 时刻的纵向位移。在杆上取微元段 $\mathrm{d}x$，它的受力如图 6.3.1($b$) 所示。根据牛顿第二定律，它的运动方程为

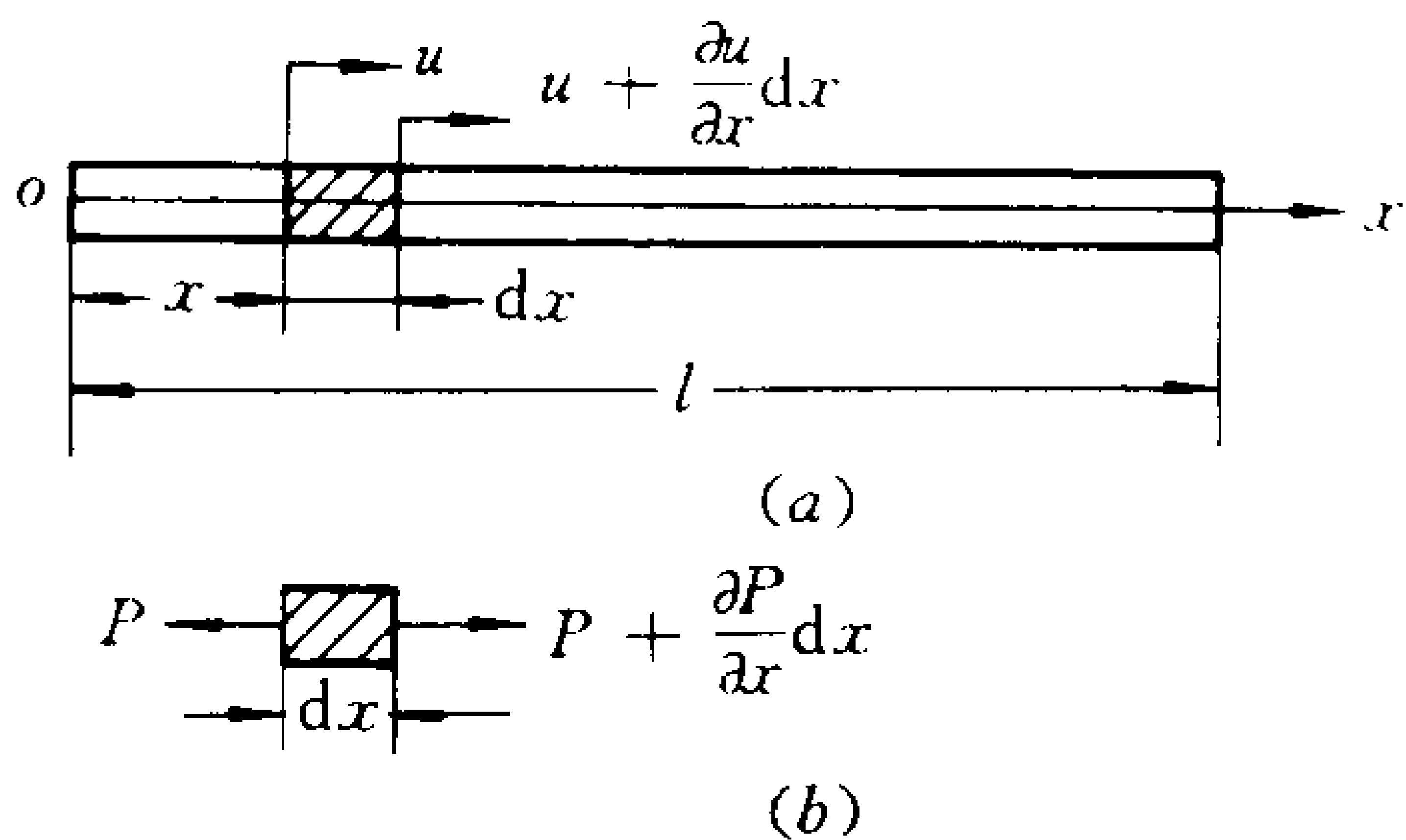


图 6.3.1 杆纵向振动

$$\rho A\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=P+\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x-P \tag{6.3.1}$$

由图 6.3.1($a$) 可见，$\mathrm{d}x$ 段的变形为 $\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$，所以 $x$ 处的应变 $\varepsilon(x)$ 为 $\frac{\partial u}{\partial x}$，对应的轴向内力 $P(x)$ 为

$$P(x)=AE\varepsilon=AE\,\frac{\partial u}{\partial x} \tag{6.3.2}$$

将它代入式(6.3.1) 并化简，得

$$\rho A\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=AE\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.3.3}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{6.3.4}$$

其中 $c^2=\frac{E}{\rho}$。可见杆的纵向振动的运动微分方程也是一维波动方程。方程的求解仍可采用 6.2.2 节中的分离变量法，将 $u(x,t)$ 表示为

$$u(x,t)=X(x)U(t) \tag{6.3.5}$$

可得类似于方程(6.2.10) 和(6.2.11) 的常微分方程组，由此解得

$$U(t) = A\sin pt + B\cos pt \tag{6.3.6}$$

$$X(x) = C\sin\frac{p}{c}x + D\cos\frac{p}{c}x \tag{6.3.7}$$

其中固有频率 $p$ 与振型函数 $X(x)$ 由杆的边界条件确定。典型的边界条件有以下几种：

(1) **固定端**　该处纵向位移为零，即有

$$u(\xi,t) = 0,\quad \xi = 0 \text{ 或 } l$$

(2) **自由端**　该处轴向内力为零，即有

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,t) = 0,\quad \xi = 0 \text{ 或 } l$$

(3) **弹性支承**　设杆的右端为弹性支承(图 6.3.2($a$))，则此处轴向内力等于弹性力，即

$$ku(l,t) = -EA\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)$$

(4) **惯性载荷**　设杆的右端附一集中质量块(图 6.3.2($b$))，则此处杆的轴向内力等于质量块的惯性力，即

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,t) = -EA\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)$$

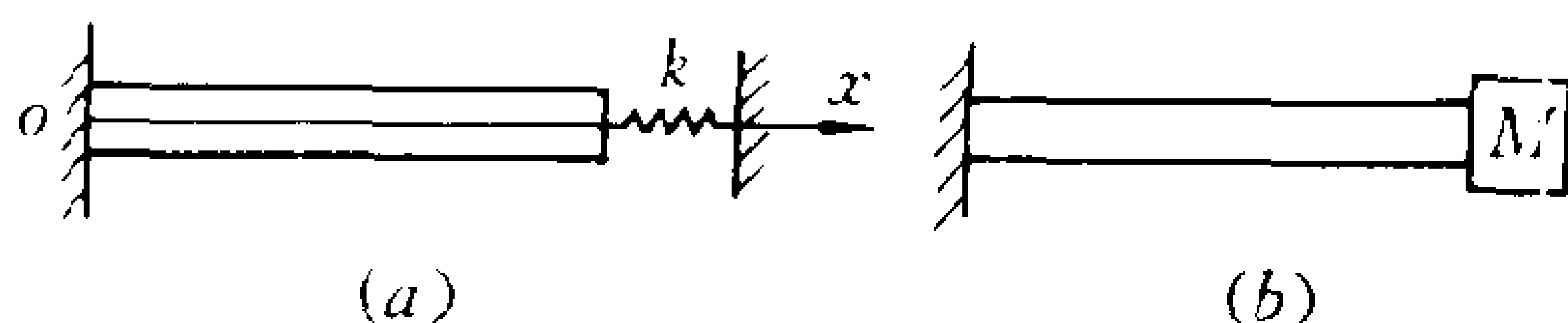



图 6.3.2　两类边界条件

**例 6.3.1**　一匀质细直杆的左端固定，右端通过弹簧与固定点相连(图 6.3.2($a$))。试推导系统的频率方程。

**解**　杆在两端的边界条件可表示为

$$u(0,t) = 0$$

和
$$ku(l,t) = -EA\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)$$
即
$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ kX(l) = -EA\dfrac{\mathrm{d}X(l)}{\mathrm{d}x} \end{cases}$$

将此边界条件代入振型函数 $X(x)$（式(6.3.7)）中，可得
$$D = 0$$
$$k\sin\frac{p}{c}l = -EA\frac{p}{c}\cos\frac{p}{c}l$$

由此可知，系统的频率方程为
$$\frac{\tan(pl/c)}{pl/c} = -\frac{EA}{kl} \equiv \alpha$$
对应给定的 $\alpha$ 值，不难找到各固有频率 $p_i$ 的数值解，而与各个 $p_i$ 相应的振型函数为
$$X_i(x) = \sin\frac{p_i}{c}x$$

## 6.3.2　轴的扭转振动

图 6.3.3($a$) 为一长为 $l$ 的等截面直圆轴。设轴单位体积的质量为 $\rho$，圆截面对其中心的极惯性矩为 $I_p$，材料的剪切弹性模量为 $G$。讨论中还假定轴的横截面在扭转振动中保持为平面作整体转动。以 $\theta(x,t)$ 表示轴上 $x$ 截面处在 $t$ 时刻相对左端面的扭转角。为推导轴扭转振动的微分方程，从其中截取一微元段

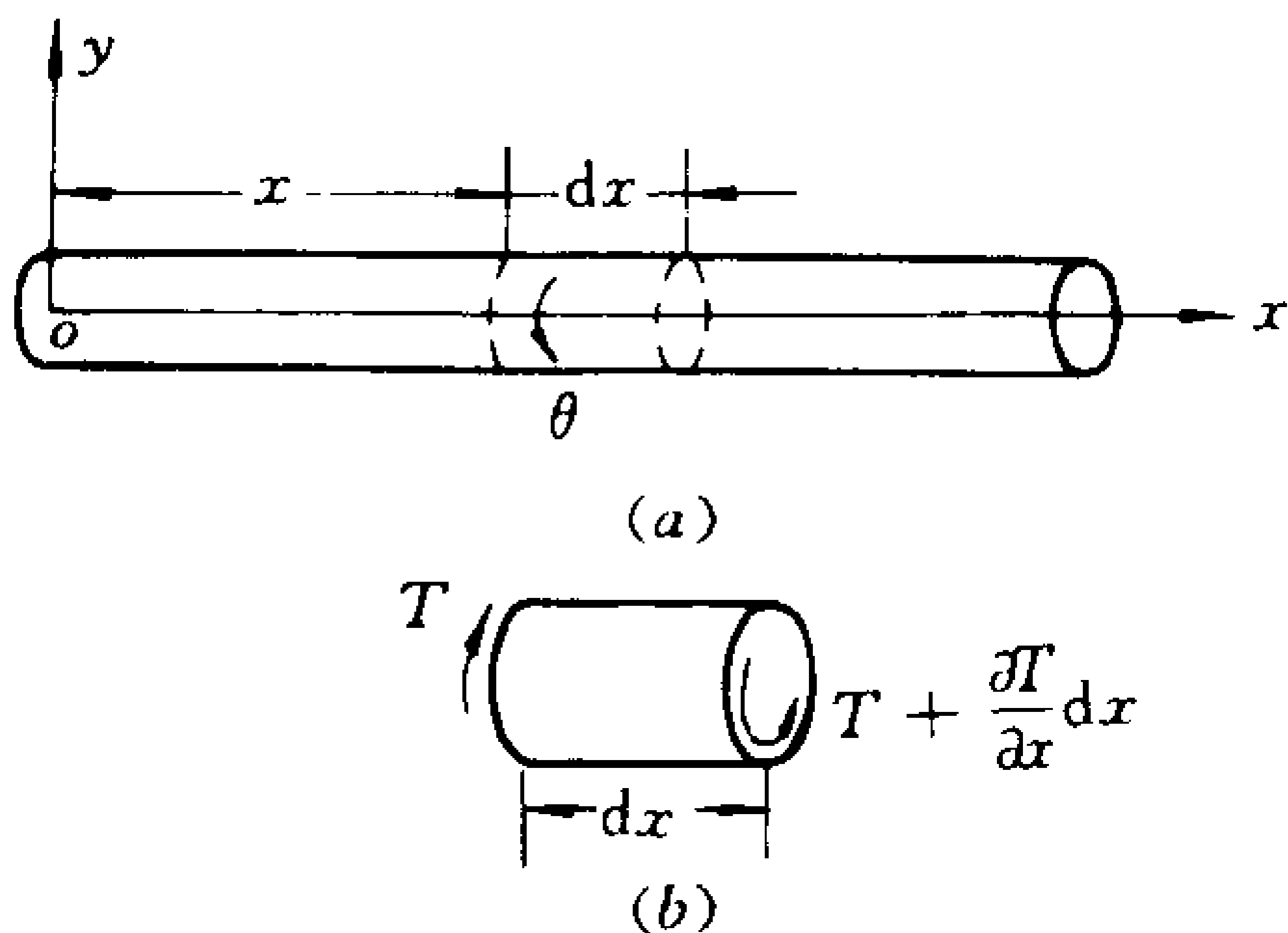


图 6.3.3　轴的扭振

$\mathrm{d}x$，受力如图 6.3.3($b$) 所示，由此可列出运动微分方程为

$$\rho I_{\mathrm{p}} \mathrm{d}x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = T + \frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}x - T \tag{6.3.8}$$

其中 $T$ 为轴上 $x$ 截面处的扭矩。由材料力学知，$T = GI_{\mathrm{p}} \dfrac{\partial \theta}{\partial x}$，代入式(6.3.8)，并整理，得

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \tag{6.3.9}$$

其中 $c^2 = \dfrac{G}{\rho}$。可见轴的扭转振动微分方程仍可归结为一维波动方程。

常见轴的边界条件有以下几种：

(1) **固定端**　该处转角为零，即有

$$\theta(\xi, t) = 0, \quad \xi = 0 \text{ 或 } l$$

(2) **自由端**　该处扭矩为零，即

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(\xi, t) = 0, \quad \xi = 0 \text{ 或 } l$$

(3) **弹性支承**　若轴的右端通过刚度为 $K_t$ 的扭簧与固定点相连，则有

$$K_t \theta(l, t) = - I_{\mathrm{p}} G \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t)$$

(4) **惯性载荷**　若轴的右端附有一圆盘，则有

$$J_o \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(l, t) = - I_{\mathrm{p}} G \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t)$$

其中 $J_0$ 为圆盘对转轴的转动惯量。

**例 6.3.2**　设轴的一端固定，另一端附有圆盘，如图 6.3.4 所示。圆盘对转轴的转动惯量为 $J_o$，试考察这一系统的扭振固有频率与振型函数。

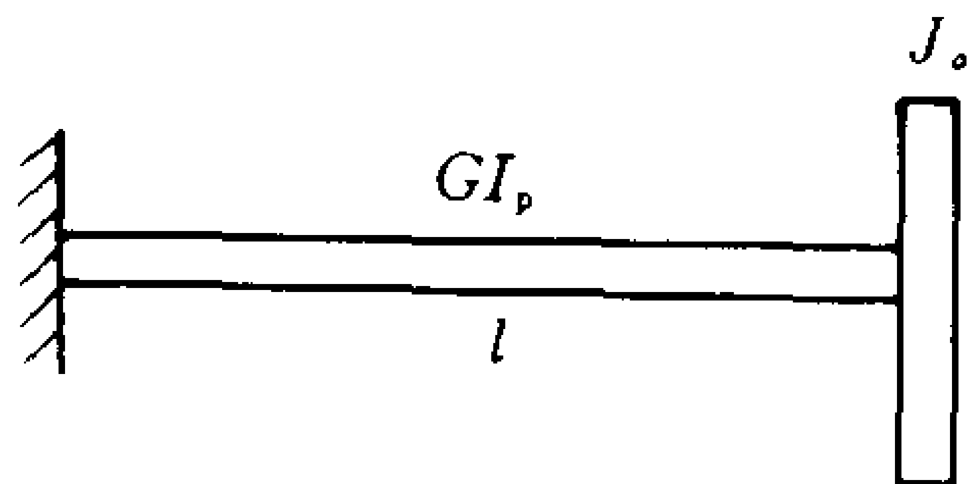



图 6.3.4　带圆盘的轴

**解** 设轴的扭转振动可表示为

$$\theta(x,t)=X(x)\Theta(t)$$

且有

$$\Theta(t)=A\sin pt+B\cos pt$$

$$X(x)=C\sin\frac{p}{c}x+D\cos\frac{p}{c}x$$

轴在左端有 $u(0,t)=0$，在轴的右端有

$$J_o\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(l,t)=-I_pG\frac{\partial\theta}{\partial x}(l,t)$$

以上边界条件也可表示为

$$X(0)=0 \tag{a}$$

$$J_op^2X(l)=I_pG\frac{dX(l)}{dx} \tag{b}$$

由式($a$)得

$$D=0$$

由式($b$)可得

$$J_op^2\sin\frac{p}{c}l=I_pG\frac{p}{c}\cos\frac{p}{c}l$$

或写成

$$\beta\tan\beta=\alpha \tag{c}$$

其中

$$\beta=\frac{pl}{c},\quad \alpha=\frac{I_p\rho l}{J_o}$$

式($c$)即轴系的特征方程。$\alpha$ 的物理意义为轴的转动惯量与圆盘转动惯量之比。对于给定的 $\alpha$ 值，不难找出轴系固有频率的数值解。在实用上，通常基频振动最为重要。表 6.3.1 给出了对应于各个不同的 $\alpha$ 值时，基本特征值 $\beta_1$ 的值。

**表 6.3.1　对应于不同 $\alpha$ 值的 $\beta_1$ 的值**

| $\alpha$ | 0.01 | 0.10 | 0.30 | 0.50 | 0.70 | 0.90 | 1.00 | 1.50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta_1$ | 0.10 | 0.32 | 0.52 | 0.65 | 0.75 | 0.82 | 0.86 | 0.98 |
| $\alpha$ | 2.00 | 3.00 | 4.00 | 5.00 | 10.0 | 20.0 | 100 | $\infty$ |
| $\beta_1$ | 1.08 | 1.20 | 1.27 | 1.32 | 1.42 | 1.52 | 1.57 | $\pi/2$ |

注意，当 $\alpha$ 取小值时，$\beta_1$ 亦为小值。如近似地取 $\tan\beta \approx \beta$，则式($c$)化简为

$$\beta^2 = \alpha \tag{d}$$

或写为

$$p^2 = \frac{c^2\rho I_p}{J_0 l} = \frac{GI_p}{J_0 l}$$

注意，$GI_p/l$ 就是轴的扭转弹簧常数，上式也就是略去轴的质量后所得1自由度系统的固有频率公式。可以看到，当 $\alpha = 0.3$ 时，由上式给出的固有频率近似值的误差约为5%。

进一步的近似可取 $\tan\beta \approx \beta + \frac{\beta^3}{3}$，这时有

$$\beta\left(\beta + \frac{\beta^3}{3}\right) = \alpha$$

即有

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \beta^2/3}}$$

再将式($d$)中的 $\beta^2$ 代入上式右端，可得

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \alpha/3}}$$

或写为

$$p = \sqrt{\left(\frac{GI_p}{l}\right) \Big/ J_0\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)} \tag{e}$$

上式也就是将轴的转动惯量的 1/3 加到圆盘上后所得 1 自由度扭振系统的固有频率公式。它和瑞利能量法所得的结果相一致。可以看到，当 $\alpha = 1$ 时，用式($e$) 所得的基频近似值的误差还不到 1%。所以说，只要轴的转动惯量不大于圆盘的转动惯量，那末计算基频的近似式($e$) 在实用上已足够准确了。

## 6.4 梁的弯曲振动

### 6.4.1 梁弯曲振动的运动方程

现在考察匀质等截面细直梁的横向弯曲振动。假定梁具有纵向对称平面，所受的外力也在此对称平面内，因此梁在此平面内作弯曲振动；另外还假定梁的长度与截面高度之比大于 10。根据材料力学中"简单梁理论"，忽略剪切变形和转动惯量的影响，这种梁称做欧拉-贝努利(Euler-Bernoulli) 梁。于是，梁上各点的运动只需用梁轴线的横向位移表示。

设梁长为 $l$，单位长度的质量 $\rho$ 及抗弯刚度 $EI$ 均为常数，建立如图 6.4.1 所示的坐标系。在梁上距左端 $x$ 处取微元段 $\mathrm{d}x$，在任意瞬时 $t$，此微元段的横向位移可用 $y(x,t)$ 表示。按其受力情况，微元段沿 $y$ 方向的运动方程为

$$\rho \mathrm{d}x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Q - (\frac{\partial Q}{\partial x} + Q) + p(x,t)\mathrm{d}x \qquad (6.4.1)$$

由于忽略转动惯量的影响，各力对右截面上任一点的矩之和应为零，即

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} - M - Q\mathrm{d}x - q\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}x}{2} = 0$$

略去二阶微量，有

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} \qquad (6.4.2)$$

另外，由材料力学知，弯矩与挠曲线的关系为

$$M = EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{6.4.3}$$

将式(6.4.2)和式(6.4.3)代入式(6.4.1)中，得

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + p(x,t) \tag{6.4.4}$$

上式就是梁弯曲振动的运动微分方程。如 $p(x,t)\equiv 0$，梁作自由振动，其运动微分方程为

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \tag{6.4.5}$$

或写成

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{6.4.6}$$

其中 $a^2 = \frac{EI}{\rho}$。

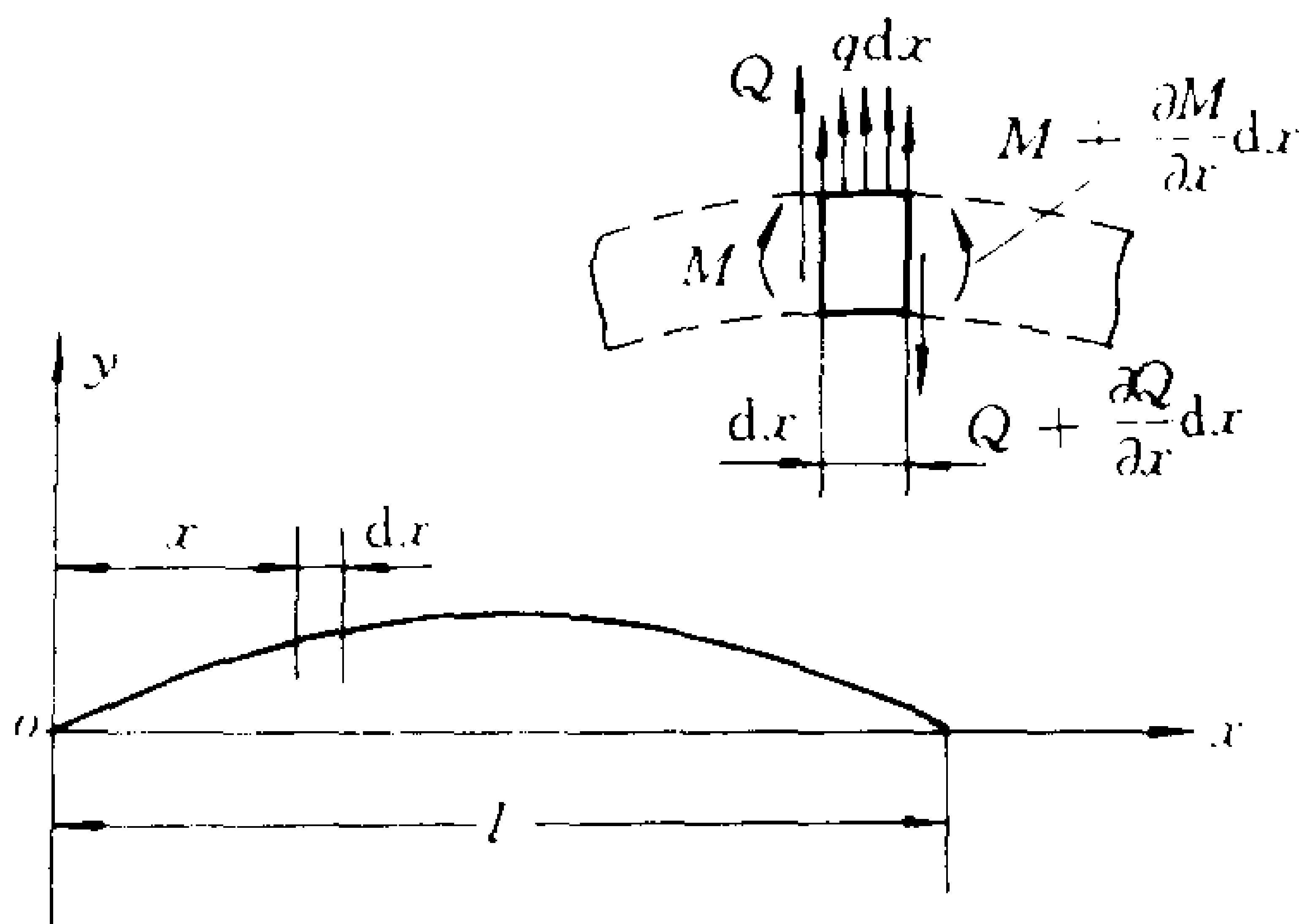



图 6.4.1　梁的弯振

## 6.4.2　梁的自由振动

梁弯曲振动的运动微分方程(6.4.6)是一个四阶偏微分方程。为求其振动解，仍可采用分离变量法，即假定方程(6.4.6)的

解有下列形式

$$y(x,t)=X(x)Y(t) \tag{6.4.7}$$

将式(6.4.7)代入方程(6.4.6)中，得

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dt^2}=-\frac{a^2}{X}\frac{d^4X}{dx^4} \tag{6.4.8}$$

要使仅依赖于$t$的左端与仅依赖于$x$的右端相等，两者应等于同一常数。取这一常数为$-p^2$，于是有

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+p^2Y=0 \tag{6.4.9}$$

$$\frac{d^4X}{dx^4}-\beta^4X=0,\quad \beta^2=\frac{p}{a} \tag{6.4.10}$$

方程(6.4.9)的通解为

$$Y(t)=A\sin pt+B\cos pt \tag{6.4.11}$$

方程(6.4.10)是一个四阶常系数线性微分方程，它的特征方程是

$$\lambda^4-\beta^4=0$$

其特征值为

$$\lambda_1=\beta,\quad \lambda_2=-\beta,\quad \lambda_3=\beta\mathrm{j},\quad \lambda_4=-\beta\mathrm{j}$$

所以，方程(6.4.10)的通解为

$$X(x)=Ce^{\beta x}+De^{-\beta x}+Ee^{\mathrm{i}\beta x}+Fe^{-\mathrm{i}\beta x}$$

或表示为

$$X(x)=c_1\mathrm{ch}\beta x+c_2\mathrm{sh}\beta x+c_3\cos\beta x+c_4\sin\beta x^{①} \tag{6.4.12}$$

特征值$\beta$及振型函数由梁的边界条件来确定。

对于梁的弯曲振动，基本的边界条件有以下几种：

(1) **固支端**　固支端的挠度和转角都为零，即

---

① 双曲函数有如下关系

$$\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\ \mathrm{ch}x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

$$\left.\begin{aligned} &y(\xi,t)=0\\ &\frac{\partial y}{\partial x}(\xi,t)=0 \end{aligned}\right\}\quad \xi=0\text{ 或 }l \tag{6.4.13}$$

(2) **铰支端** 铰支端的挠度与弯矩都为零，即

$$\left.\begin{aligned} &y(\xi,t)=0\\ &EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\xi,t)=0 \end{aligned}\right\}\quad \xi=0\text{ 或 }l \tag{6.4.14}$$

(3) **自由端** 自由端的弯矩与剪力都为零，即

$$\left.\begin{aligned} &EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\xi,t)=0\\ &EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(\xi,t)=0 \end{aligned}\right\}\quad \xi=0\text{ 或 }l \tag{6.4.15}$$

除了以上基本边界条件以外，还有其它一些边界条件。比如梁端具有弹性支承或附有集中质量(图 6.4.2)。图 6.4.2($a$) 所示梁右端的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t)=-k_t\frac{\partial y}{\partial x}(l,t)\\ &EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l,t)=ky(l,t) \end{aligned}\right\} \tag{6.4.16}$$

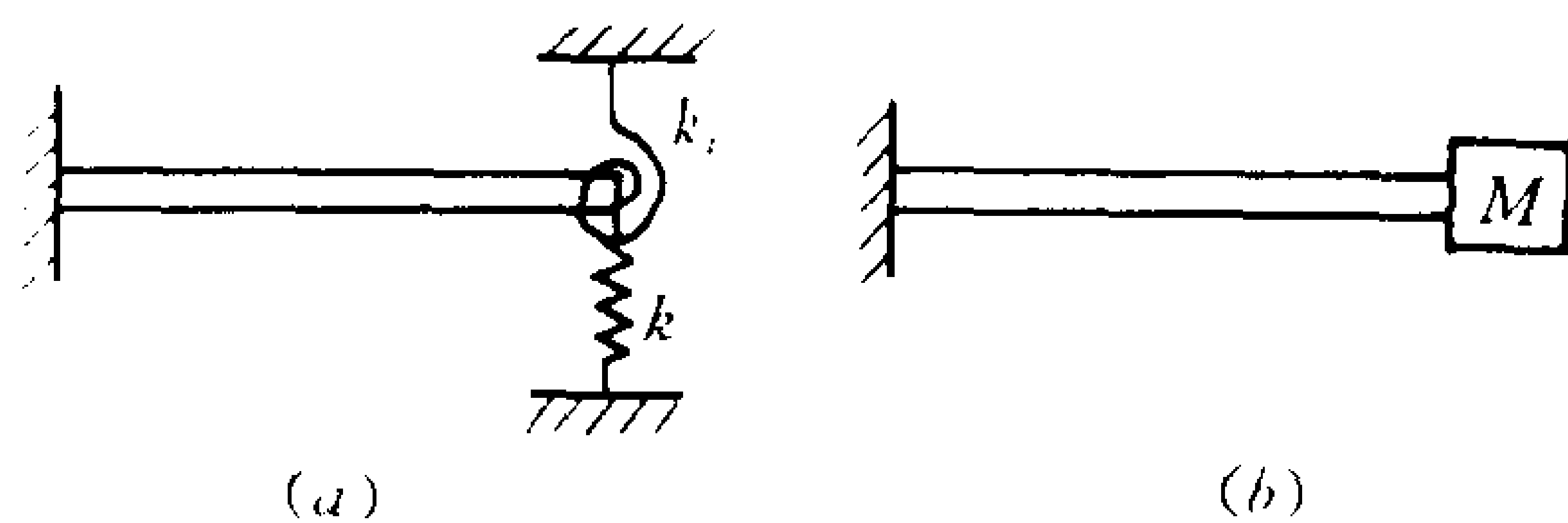



图 6.4.2 两类边界条件

图 6.4.2($b$) 所示梁右端的边界条件为

$$
\left.\begin{aligned}
EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) &= 0 \\
EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l,t) &= M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(l,t)
\end{aligned}\right\} \tag{6.4.17}
$$

在所有这些边界条件中，反映对端点位移或转角的约束条件称为几何边界条件，反映对弯矩或剪力的约束条件称为力边界条件。

根据梁的边界条件，可确定梁的无限多个固有频率 $p_i$ 和相应的振型函数 $X_i(x)$，因而梁弯曲自由振动的一般表达式为

$$
y(x,t) = \sum X_i(x)(A_i\sin p_i t + B_i\cos p_i t) \tag{6.4.18}
$$

式中 $A_i, B_i(i = 1,2,\cdots)$ 由系统的初始条件 $y(x,0)$，和 $\dot{y}(x,0)$ 决定。

### 6.4.3 固有频率与振型函数

在具体考察各种支承情况下梁弯曲振动固有频率和振型函数之前，先将边界条件中要用到的 $X(x)$ 的各阶导数列出如下：

$$
X'(x) = \beta[c_1\mathrm{sh}\beta x + c_2\mathrm{ch}\beta x - c_3\sin\beta x + c_4\cos\beta x] \tag{6.4.19}
$$

$$
X''(x) = \beta^2[c_1\mathrm{ch}\beta x + c_2\mathrm{sh}\beta x - c_3\cos\beta x - c_4\sin\beta x] \tag{6.4.20}
$$

$$
X'''(x) = \beta^3[c_1\mathrm{sh}\beta x + c_2\mathrm{ch}\beta x + c_3\sin\beta x - c_4\cos\beta x] \tag{6.4.21}
$$

下面先讨论几种常见梁的情形。

1. 简支梁(图 6.4.3)

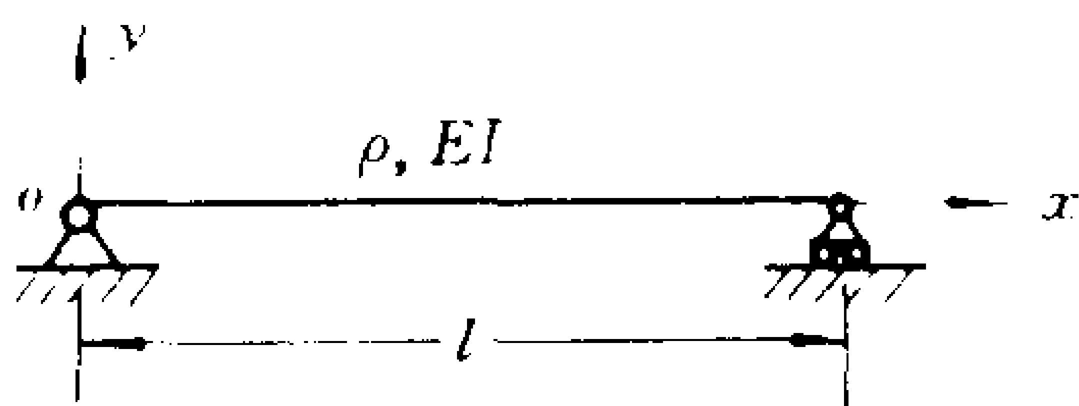



图 6.4.3 简支梁

由简支梁的边界条件(6.4.14)可推知

$$X(0)=0,\quad X''(0)=0 \tag{6.4.22}$$

和

$$X(l)=0,\quad X''(l)=0 \tag{6.4.23}$$

由式(6.4.22),有

$$c_1+c_3=0 \qquad c_1-c_3=0$$

故有

$$c_1=c_3=0$$

由式(6.4.23),有

$$c_2\mathrm{sh}\beta l+c_4\sin\beta l=0$$

$$c_2\mathrm{sh}\beta l-c_4\sin\beta l=0$$

因为 $\beta l\neq 0$ 时, $\mathrm{sh}\beta l\neq 0$;故得

$$c_2=0$$

于是,特征方程为

$$\sin\beta l=0 \tag{6.4.24}$$

由此得特征根为

$$\beta_i=\frac{i\pi}{l},\quad i=1,2,\cdots \tag{6.4.25}$$

因 $\beta^2=\dfrac{p}{a}$,所以系统的固有频率为

$$p_i=(i\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}},\quad i=1,2,\cdots \tag{6.4.26}$$

相应的振型函数为

$$X_i(x)=\sin\frac{i\pi}{l}x,\quad i=1,2,\cdots \tag{6.4.27}$$

2. 固支梁(图 6.4.4)

由固支梁的边界条件(6.4.13)可推知

$$X(0)=0,\quad X'(0)=0 \tag{6.4.28}$$

$$X(l)=0,\quad X'(l)=0 \tag{6.4.29}$$

由式(6.4.28),有

$$c_1 + c_3 = 0$$
$$c_2 + c_4 = 0$$

故有

$$c_1 = -c_3, \quad c_2 = -c_4$$

再由式(6.4.29)，可得

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{ch}\beta l - \cos\beta l)c_1 + (\mathrm{sh}\beta l - \sin\beta l)c_2 = 0\\(\mathrm{sh}\beta l + \sin\beta l)c_1 + (\mathrm{ch}\beta l - \cos\beta l)c_2 = 0\end{aligned}\right\} \tag{6.4.30}$$

要使 $c_1, c_2$ 有非零解，上式的系数行列式必须为零，即

$$\begin{vmatrix}\mathrm{ch}\beta l - \cos\beta l & \mathrm{sh}\beta l - \sin\beta l\\ \mathrm{sh}\beta l + \sin\beta l & \mathrm{ch}\beta l - \cos\beta l\end{vmatrix} = 0 \tag{6.4.31}$$

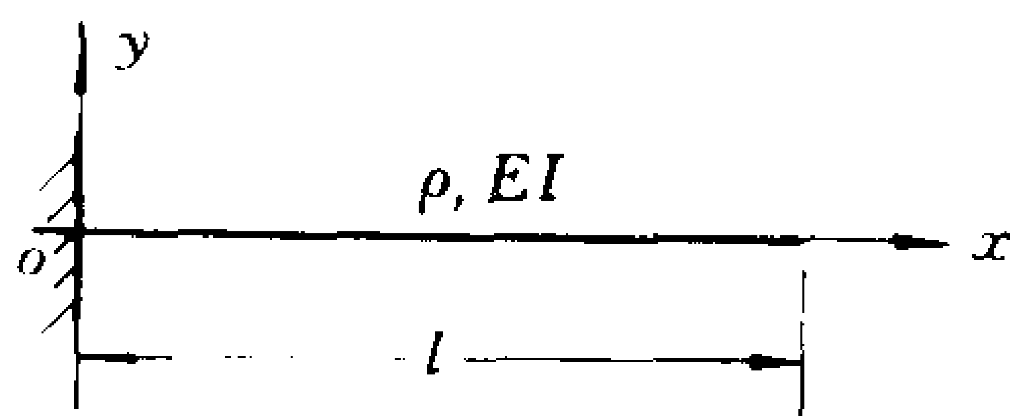



图 6.4.4　固支梁

考虑到

$$\mathrm{ch}^2\beta l - \mathrm{sh}^2\beta l = 1, \quad \cos^2\beta l + \sin^2\beta l = 1$$

式(6.4.31)可化简为

$$\cos\beta l\,\mathrm{ch}\beta l = 1 \tag{6.4.32}$$

这就是两端固支梁的特征方程。用数值解法可以求得一系列 $\beta_i$ 值 $(i = 1,2,\cdots)$，前5阶的特征根如下①：

| $r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\beta_r l$ | 4.730 | 7.853 | 10.996 | 14.137 | 17.279 |

其中，对应于 $i \geqslant 2$ 的各个特征根可足够准确地取为

$$\beta_i l \doteq (i + \frac{1}{2})\pi, \quad i = 2,3,4,\cdots$$

梁的各固有频率相应地为

① 方程(6.4.32)的零根 $\beta = 0$，对应于系统的静止状态，故舍去。

$$p_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad i = 1,2,\cdots \tag{6.4.33}$$

求得各特征根后，由式(6.4.30)可确定系数 $c_1$ 与 $c_2$ 的比值。

$$\begin{aligned}\gamma_i = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)_i &= -\frac{\text{ch}\beta_i l - \cos\beta_i l}{\text{sh}\beta_i l - \sin\beta_i l} \\ &= -\frac{\text{sh}\beta_i l + \sin\beta_i l}{\text{ch}\beta_i l - \cos\beta_i l}\end{aligned} \tag{6.4.34}$$

故与 $p_i$ 相应的各振型函数可取为

$$X_i(x) = \text{ch}\beta_i x - \cos\beta_i x + \gamma_i(\text{sh}\beta_i x - \sin\beta_i x) \tag{6.4.35}$$

其中前3阶振型函数示于图6.4.5中。

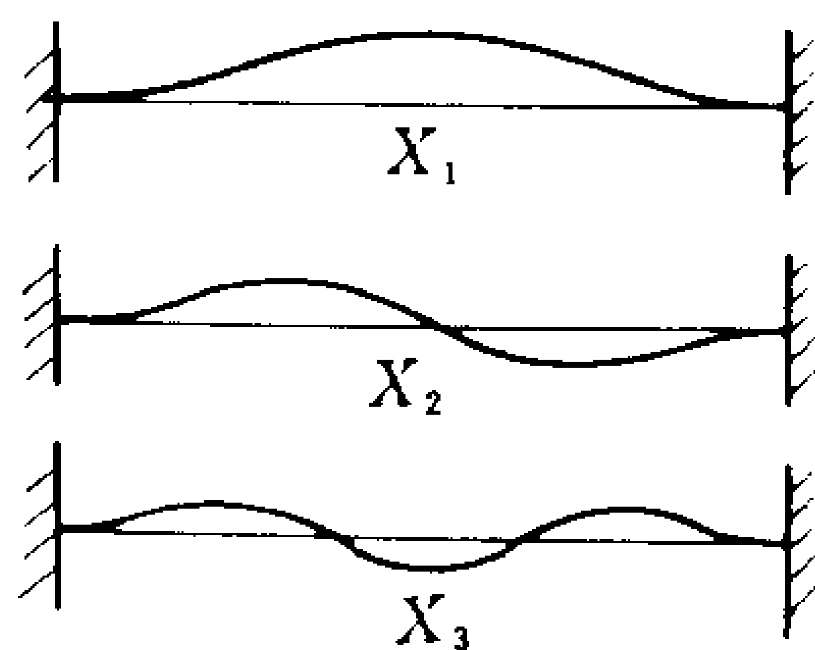


图6.4.5　振型函数

读者可以证明：从自由梁的边界条件

$$X''(0) = 0, \quad X'''(0) = 0$$
$$X''(l) = 0, \quad X'''(l) = 0$$

得到的自由梁弯曲振动的特征方程与固支梁的特征方程(6.4.32)相同。不过自由梁还有

$$\beta = 0$$

的二重特征根。它们分别对应于自由梁的两种横向刚体运动，即在对称面内的铅直平动和绕质心的转动。需要指出，虽然自由梁与固支梁有相同的弯曲振动固有频率，但它们对应的振型函数却是不同的。

3. 悬臂梁(图6.4.6)

一端固定，一端自由梁的边界条件可表示为

$$X(0) = X'(0) = 0 \tag{6.4.36}$$

$$X''(l) = X'''(l) = 0 \tag{6.4.37}$$

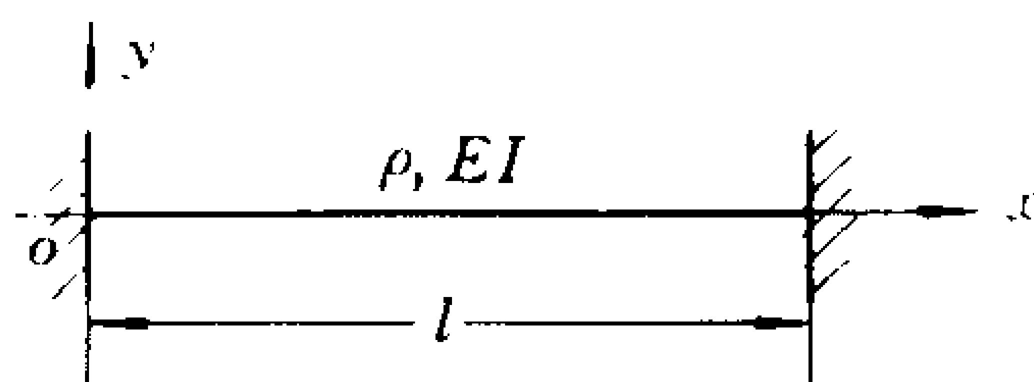


图 6.4.6 悬臂梁

由条件(6.4.36),可得

$$c_3 = -c_1$$

$$c_4 = -c_2$$

利用这一结果与条件(6.4.37),有

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{ch}\beta l + \cos\beta l)c_1 + (\mathrm{sh}\beta l + \sin\beta l)c_2 = 0\\(\mathrm{sh}\beta l - \sin\beta l)c_1 + (\mathrm{ch}\beta l + \cos\beta l)c_2 = 0\end{aligned}\right\} \tag{6.4.38}$$

方程(6.4.38)有非零解的条件为

$$\begin{vmatrix}\mathrm{ch}\beta l + \cos\beta l & \mathrm{sh}\beta l + \sin\beta l\\\mathrm{sh}\beta l - \sin\beta l & \mathrm{ch}\beta l + \cos\beta l\end{vmatrix} = 0$$

上式经展开并化简后可得

$$\cos\beta l\,\mathrm{ch}\beta l = -1 \tag{6.4.39}$$

即悬臂梁弯曲振动的特征方程。它的前 5 阶特征根可借数值解法求得如下:

| $r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\beta_r l$ | 1.875 | 4.694 | 7.855 | 10.996 | 14.137 |

其中对于 $i \geqslant 3$ 的各特征根可足够准确地取为

$$\beta_i l \doteq (i - \frac{1}{2})\pi, \quad i = 3,4,\cdots$$

悬臂梁的各阶固有频率相应地为

$$p_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad i = 1,2,\cdots \tag{6.4.40}$$

将各特征根代入方程(6.4.38),可确定系数 $c_1$ 与 $c_2$ 的比值

$$\zeta_i = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)_i = -\frac{\mathrm{ch}\beta_i l + \cos\beta_i l}{\mathrm{sh}\beta_i l + \sin\beta_i l}$$
$$= -\frac{\mathrm{sh}\beta_i l - \sin\beta_i l}{\mathrm{ch}\beta_i l + \cos\beta_i l} \tag{6.4.41}$$

故与 $p_i$ 相应的振型函数可取为

$$X(x) = \mathrm{ch}\beta_i x - \cos\beta_i x + \zeta_i(\mathrm{sh}\beta_i x - \sin\beta_i x) \tag{6.4.42}$$

前 3 阶振型函数如图 6.4.7 所示。

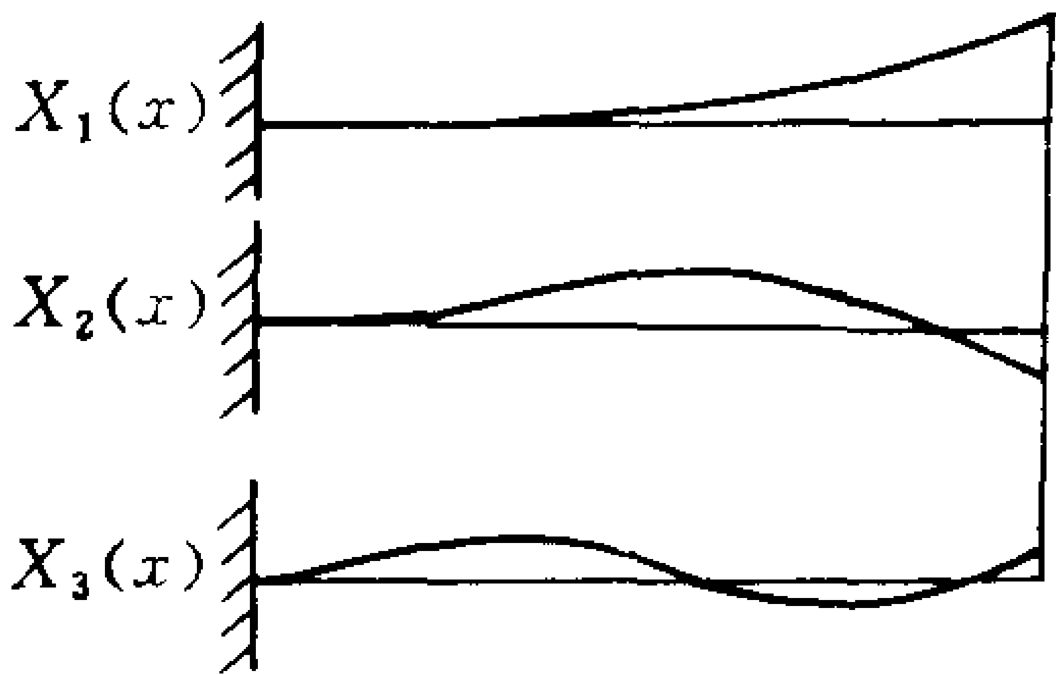



图 6.4.7　振型函数

由基本边界条件组合的其它梁的情形列于表 6.4.1 中，以供查用。

**表 6.4.1　均匀梁的弯曲振动**

| | |
|---|---|
| 物理参数 | $y = y(x,t)$　挠曲线的挠度<br>$E$　弹性模量　$\rho$ 梁单位长度的质量<br>$I$　截面惯量矩　$l$ 梁长 |
| 运动方程 | $\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,\quad a^2 = \dfrac{EI}{\rho}$ |
| 通　解 | $y(x,t) = \sum_i y_i(x,t) = \sum_i X_i(x)(A_i\sin p_i t + B_i\cos p_i t)$<br>$X_i(x) = c_1\mathrm{ch}\beta_i x + c_2\mathrm{sh}\beta_i x + c_3\cos\beta_i x + c_4\sin\beta_i x,$<br>$\beta_i^4 \equiv p_i^2/a^2$ |
| 固有频率 | $p_i = \dfrac{\lambda_i^2}{l^2}a = \dfrac{\lambda_i^2}{l^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\rho}},\quad \lambda_i^2 = \beta_i^2 l^2$ |

续 表

| | 固支梁 | 自由梁 | 悬臂梁 |
|---|---|---|---|
| 边界条件 | $X(0)=X'(0)=0$<br>$X(l)=X'(l)=0$ | $X''(0)=X'''(0)=0$<br>$X''(l)=X'''(l)=0$ | $X(0)=X'(0)=0$<br>$X''(l)=X'''(l)=0$ |
| 特征方程 | $1-\mathrm{ch}\lambda\cos\lambda=0$ | $1-\mathrm{ch}\lambda\cos\lambda=0$ | $1+\mathrm{ch}\lambda\cos\lambda=0$ |
| 特征根 $\lambda_i$ | 4.730 7.853 10.996<br>$\lambda_i\approx\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi$,<br>$i\geqslant 2$ | 4.730 7.853 10.996<br>(零频率除外)<br>$\lambda_i\approx\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi$,<br>$i\geqslant 2$ | 1.875 4.694 7.855<br>$\lambda_i\approx\left(i-\frac{1}{2}\right)\pi$,<br>$i\geqslant 3$ |
| 振型函数 | $\mathrm{ch}\beta_i x-\cos\beta_i x$<br>$+\gamma_i(\mathrm{sh}\beta_i x-\sin\beta_i x)$ | $\mathrm{ch}\beta_i x+\cos\beta_i x$<br>$+\gamma_i(\mathrm{sh}\beta_i x+\sin\beta_i x)$ | $\mathrm{ch}\beta_i x-\cos\beta_i x$<br>$+\zeta_i(\mathrm{sh}\beta_i x-\sin\beta_i x)$ |
| | 简支梁 | 铰支-固支梁 | 铰支-自由梁 |
| 边界条件 | $X(0)=X''(0)=0$<br>$X(l)=X''(l)=0$ | $X(0)=X''(0)=0$<br>$X(l)=X'(l)=0$ | $X(0)=X''(0)=0$<br>$X''(l)=X'''(l)=0$ |
| 特征方程 | $\sin\lambda=0$ | $\mathrm{th}\lambda-\tan\lambda=0$ | $\mathrm{th}\lambda-\tan\lambda=0$ |
| 特征根 $\lambda_i$ | $i\pi$ | 3.927 7.069 10.210<br>$\lambda_i\approx\left(i+\frac{1}{4}\right)\pi$,<br>$i=1,2,\cdots$ | 3.927 7.069 10.210<br>(零频率除外)<br>$\lambda_i\approx\left(i+\frac{1}{4}\right)\pi$,<br>$i=1,2,\cdots$ |
| 振型函数 | $\sin\frac{i\pi x}{l}$ | $\mathrm{sh}\beta_i x-\frac{\mathrm{sh}\lambda_i}{\sin\lambda_i}\sin\beta_i x$ | $\mathrm{sh}\beta_i x+\frac{\mathrm{sh}\lambda_i}{\sin\lambda_i}\sin\beta_i x$ |
| 注 | $\gamma_i=-\frac{\mathrm{ch}\lambda_i-\cos\lambda_i}{\mathrm{sh}\lambda_i-\sin\lambda_i}$, $\zeta_i=-\frac{\mathrm{ch}\lambda_i+\cos\lambda_i}{\mathrm{sh}\lambda_i+\sin\lambda_i}$ | | |

以上讨论了三种基本边界条件组合的梁的固有频率和振型函数，对于其它形式的梁也可进行类似的讨论。例如在悬臂梁自由端上加上横向弹性支承，其弹簧刚度系数为$k$。对于图6.4.8所示梁，其边界条件为

$$X(0)=0,$$
$$X'(0)=0 \quad (6.4.43)$$
$$X''(l)=0,$$
$$EIX'''(l)=kX(l) \quad (6.4.44)$$

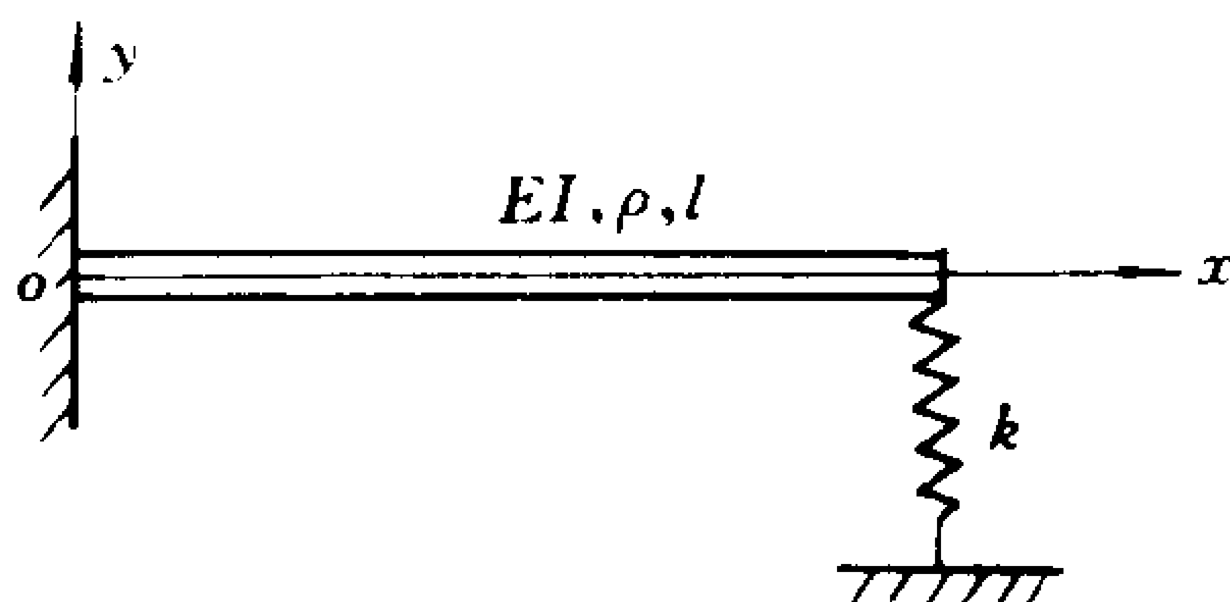



图 6.4.8　弹支端条件

由固定端的边界条件有

$$c_1=-c_3,\quad c_2=-c_4$$

由边界条件(6.4.44)及上式，有

$$\left.\begin{aligned}&(\mathrm{ch}\beta l+\cos\beta l)c_1+(\mathrm{sh}\beta l+\sin\beta l)c_2=0\\&[EI\beta^3(\mathrm{sh}\beta l-\sin\beta l)-k(\mathrm{ch}\beta l-\cos\beta l)]c_1\\&\quad+EI\beta^3(\mathrm{ch}\beta l+\cos\beta l-k(\mathrm{sh}\beta l-\sin\beta l)]c_2=0\end{aligned}\right\} \quad (6.4.45)$$

方程(6.4.45)有非零解的条件为

$$\begin{aligned}&EI\beta^3(\mathrm{ch}\beta l+\cos\beta l)^2-k(\mathrm{ch}\beta l+\cos\beta l)(\mathrm{sh}\beta l-\sin\beta l)\\&\quad-EI\beta^3(\mathrm{sh}^2\beta l-\sin^2\beta l)+k(\mathrm{sh}\beta l+\sin\beta l)\\&\quad\times(\mathrm{ch}\beta l-\cos\beta l)=0\end{aligned}$$

化简后，得

$$EI\beta^3(1+\mathrm{ch}\beta l\cos\beta l)+k(\mathrm{ch}\beta l\sin\beta l-\mathrm{sh}\beta l\cos\beta l)=0$$

或写成

$$-\frac{k}{EI}=\beta^3\frac{1+\mathrm{ch}\beta l\cos\beta l}{\mathrm{ch}\beta l\sin\beta l-\mathrm{sh}\beta l\cos\beta l} \quad (6.4.46)$$

上式即为一端固定，一端具有横向弹性支承梁的特征方程。

两种极端情形：

(1) 当 $k=0$ 时，式(6.4.46)转化为

$$1+\mathrm{ch}\beta l\cos\beta l=0$$

即得到悬臂梁的特征方程。

(2) 当 $k\to\infty$ 时，弹性支承就相当于铰支端，式(6.4.46)转化

为

$$\mathrm{ch}\beta l\sin\beta l - \mathrm{sh}\beta l\cos\beta l = 0$$

即

$$\mathrm{th}\beta l = \tan\beta l \tag{6.4.47}$$

即得到一端固定，一端铰支情形下的特征方程。

## 6.5 剪切变形、转动惯量与轴向力的影响

### 6.5.1 剪切变形与转动惯量的影响

上一节所讨论的梁的振动问题是以简单梁理论为基础的。所得到的频率和振型函数随着阶数的增高其准确性将下降。因此，当分析跨度短而截面高的梁，或者分析细长梁的高阶振型时，就必须考虑转动惯量和剪切变形的影响。

在梁上取一微元段 $dx$，如图 6.5.1 所示。图上已经考虑了微元段的转动和剪切变形。当忽略剪切变形时，微元段为虚线所示，截面法线与梁轴线的切线重合。设由弯矩 $M$ 引起的截面转角为 $\theta$；由于剪力 $Q$ 的作用，矩形单元变成平行四边形单元，但横截面没有发生转动，因此由弯矩 $M$ 和剪力 $Q$ 共同作用引起的梁轴线的实际转角 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 为

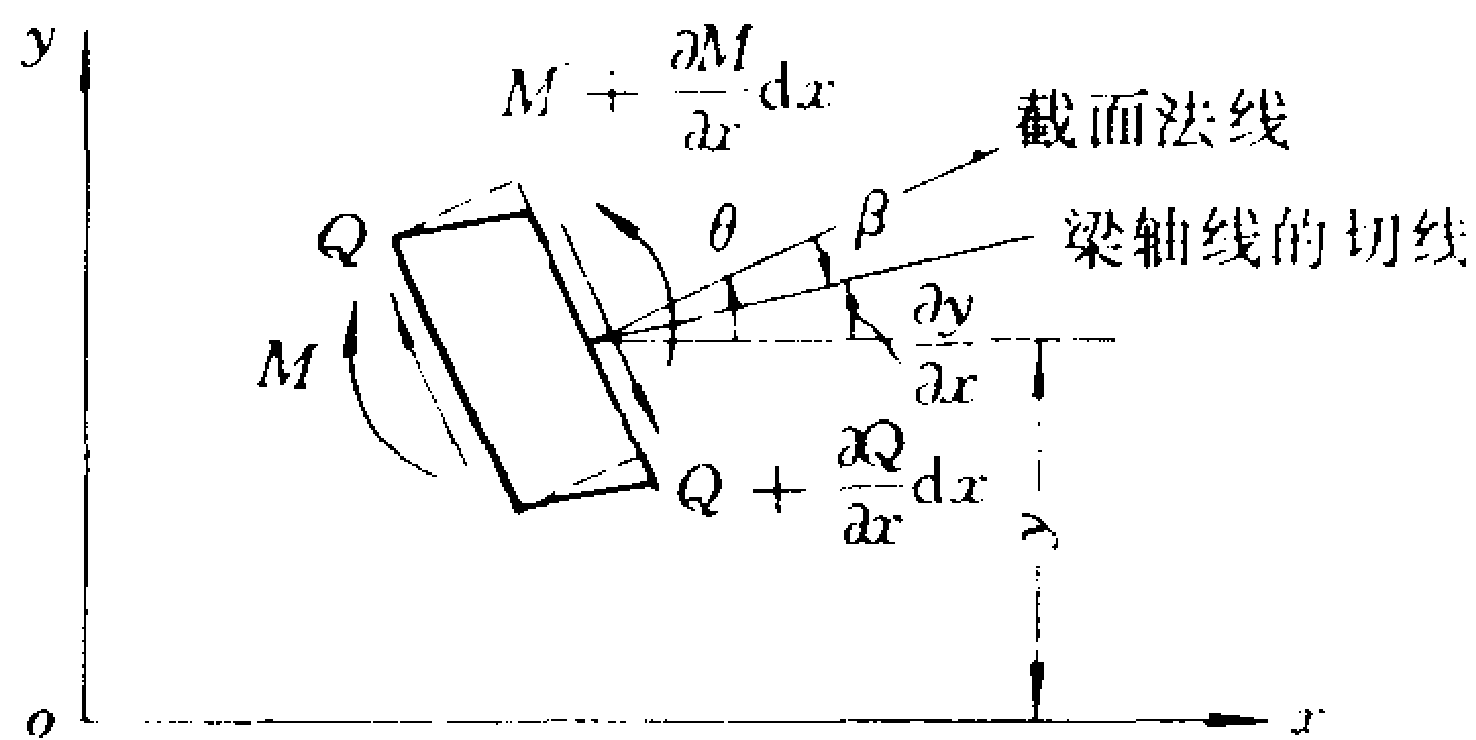



图 6.5.1 剪切与转动惯量的影响

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \theta - \beta \tag{6.5.1}$$

其中，$\beta$ 是剪切角。由材料力学知

$$\beta = \frac{Q}{KAG} \tag{6.5.2}$$

式中　$A$ —— 横截面面积；

$G$ —— 剪切弹性模量；

$k$ —— 取决于截面形状的常数因子。

根据图 6.5.1，可以列出微元段沿 $y$ 方向和绕质心转动的微分方程分别为

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{6.5.3}$$

$$J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x} - Q \tag{6.5.4}$$

式中　$\rho$ —— 梁单位长度的质量；

$J$ —— 单位长度的梁对截面中性轴的转动惯量。

将式(6.5.1)和式(6.5.2)代入以上两个方程中，并考虑到材料力学中梁的公式

$$EI \frac{\partial \theta}{\partial x} = M$$

可以得到

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left[KAG\left(\theta - \frac{\partial y}{\partial x}\right)\right] = 0 \tag{6.5.5}$$

$$J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + KAG\left(\theta - \frac{\partial y}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = 0 \tag{6.5.6}$$

对等截面均匀梁，从方程(6.5.5)和(6.5.6)中消去 $\theta$，得到

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left(J + \frac{EI\rho}{KGA}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{PJ}{KGA} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \tag{6.5.7}$$

这就是考虑剪切变形和转动惯量影响时，等截面均匀梁的自由振动方程。式中后两项反映了剪切变形和转动惯量对梁振动的影响。

**例 6.5.1**　试说明转动惯量和剪切变形对均匀简支梁固有频率的影响。

**解** 根据上一节对简支梁的讨论，可假设第 $i$ 阶主振动为

$$y_i(x,t)=\sin\frac{i\pi}{l}x\cdot\sin(p_it+\varphi_i) \tag{6.5.8}$$

它显然满足简支梁的边界条件。将它代入方程式(6.5.7)，可得频率方程为

$$\frac{EI}{\rho}\left(\frac{i\pi}{l}\right)^4-\left[1+\left(\frac{J}{\rho}+\frac{EI}{KGA}\right)\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2\right]p_i^2+\frac{J}{KGA}p_i^4=0 \tag{6.5.9}$$

由于 $p_i^4$ 的系数与其它各项系数相比要小得多，因而略去不计。于是，梁固有频率的近似值为

$$p_i\doteq\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho}}\Bigg/\sqrt{1+\left(\frac{J}{\rho}+\frac{EI}{KGA}\right)\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2} \tag{6.5.10}$$

引入关系式 $\rho=A\mu,J=\mu I=\mu Ar^2$，$r$ 是截面对中性轴的惯性半径，$\mu$ 是单位体积的质量，于是式(6.5.10)可改写为

$$p_i=\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho}}\Bigg/\sqrt{1+r^2\left(1+\frac{E}{KG}\right)\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2}$$

$$\doteq\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho}}\left[1-\frac{r^2}{2}\left(1+\frac{E}{KG}\right)\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2\right] \tag{6.5.11}$$

式中 $\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho}}$ 是不考虑剪切变形和转动惯量因素时，简支梁的固有频率。可见，剪切变形和转动惯量的影响使梁的固有频率降低，而且固有频率阶数愈高，这种影响愈大；另外，随着细长比 $r/l$ 的增加，这种影响也将增长。

如果只考虑转动惯量的影响，则式(6.5.11)为

$$p_i\doteq\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho}}\left(1-\frac{r^2}{2}\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2\right) \tag{6.5.12}$$

如果只考虑剪切变形的影响，则式(6.5.11)为

$$p_i\doteq\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho}}\left[1-\frac{r^2}{2}\frac{E}{KG}\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2\right] \tag{6.5.13}$$

考虑到对各向同性材料，$\frac{E}{G}=2(1+\nu)$，又 $k<1$，所以剪切变形对固有频率的影响比转动惯量的影响大。

### 6.5.2　轴向力的影响

如果梁在两端轴向拉力作用下作自由振动，则微元段上所受的力除剪力 $Q$ 和弯矩 $M$ 外，还将有轴向力 $T$ 的作用，如图 6.5.2 所示。在微小振动的情形下，假定轴向力 $T$ 是常量，并且这里不考虑剪切变形和转动惯量的影响。

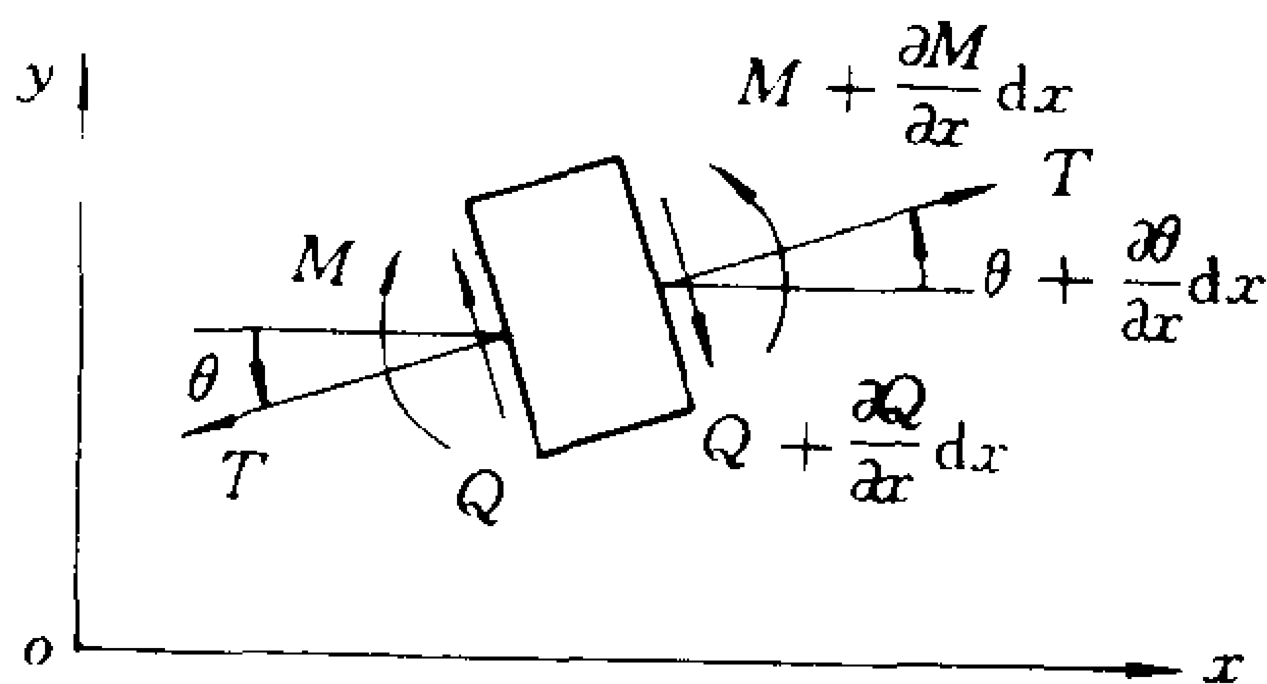



图 6.5.2　轴向力的影响

微分段在 $y$ 方向的运动微分方程为

$$\rho\mathrm{d}x=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$=Q-\left(Q+\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\right)+T\left(\theta+\frac{\partial\theta}{\partial x}\mathrm{d}x\right)-T\theta$$

将 $\theta=\frac{\partial y}{\partial x}$，$Q=\frac{\partial M}{\partial x}$，$M=EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ 等关系代入上式，化简后即得在轴向力作用下梁自由振动的微分方程

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)+T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\tag{6.5.14}$$

下面以等截面均匀简支梁为例，讨论轴向力对梁弯曲振动固有频率的影响。

对于简支梁，可假设第 $i$ 阶主振动为

$$y_i(x,t)=\sin\frac{i\pi}{l}x\cdot\sin(p_i t+\varphi_i)\tag{6.5.15}$$

代入式(6.5.14)，可得系统的频率方程为

$$\rho p_i^2 - EI(\frac{i\pi}{l})^4 - T(\frac{i\pi}{l})^2 = 0 \qquad (6.5.16)$$

由此解得固有频率为

$$p_i^2 = (\frac{i\pi}{l})^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}[1 + \frac{Tl^2}{(i\pi)^2 EI}] \qquad (6.5.17)$$

与上一节讨论的简支梁固有频率式(6.4.26)相比，轴向拉力的作用使得系统固有频率有所提高，而且随着频率阶数的增加，这种影响将减小。这是由于轴向拉力的作用，将使梁的挠度减小，相当于增加了梁的刚度。

读者试分析，轴向压力对系统固有频率的影响。

## 6.6 振型函数的正交性

在第五章中我们讨论过多自由度系统主振型的正交性，这种正交性是模态分析法的基础。本章引言中曾提到弹性体振动具有类似的特性。从前几节的讨论中可以看到，一些简单情形下的振型函数是三角函数，它们的正交性是比较熟悉的；而在另一些情形下得到的振型函数还包含有双曲函数，它们的正交性以及更一般情形下振型函数的正交性尚待进一步说明。

下面我们仅就梁的弯曲振动的振型函数论证其正交性。因为在讨论正交性时，不必涉及振型函数的具体形式，所以我们稍微放宽一些假设条件，考察变截面梁的情形。这时，梁单位长度的质量 $\rho(x)$ 以及截面刚度 $EI(x)$ 都是 $x$ 的已知函数，而不必为常数。故梁的自由弯曲振动微分方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)\right] = -\rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \qquad (6.6.1)$$

采用分离变量法，将 $y(x,t)$ 表示为

$$y(x,t) = X(x)Y(t) \qquad (6.6.2)$$

将它代入方程(6.6.1)进行分离变量后，可得

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+p^2Y=0 \tag{6.6.3}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2X}{dx^2}\right]=p^2\rho(x)X(x) \tag{6.6.4}$$

我们将从方程(6.6.4)出发，分两种情形进行讨论。

1. 以基本边界条件组合的梁的情形

当梁的边界条件为基本边界条件时，与式(6.4.13)，(6.4.14)，(6.4.15)相对应的边界条件分别为

固支端

$$\left.\begin{aligned}X(\xi)&=0\\X'(\xi)&=0\end{aligned}\right\}\quad \xi=0\text{ 或 }l \tag{6.6.5}$$

铰支端

$$\left.\begin{aligned}X(\xi)&=0\\EI(\xi)X''(\xi)&=0\end{aligned}\right\}\quad \xi=0\text{ 或 }l \tag{6.6.6}$$

自由端

$$\left.\begin{aligned}EI(\xi)X''(\xi)&=0\\\left[EI(x)X''(x)\right]'\big|_{x=\xi}&=0\end{aligned}\right\}\quad \xi=0\text{ 或 }l \tag{6.6.7}$$

现假设方程(6.6.4)在一定的边界条件下，对应于任意两个不同的特征值 $p_i$ 或 $p_j$ 的振型函数分别为 $X_i(x)$ 与 $X_j(x)$，于是有

$$[EI(x)X_i''(x)]''=p_i^2\rho(x)X_i(x),\quad 0<x<l \tag{6.6.8}$$

$$[EI(x)X_j''(x)]''=p_j^2\rho(x)X_j(x),\quad 0<x<l \tag{6.6.9}$$

对式(6.6.8)乘以 $X_j(x)\mathrm{d}x$，然后在 $0<x<l$ 上对 $x$ 进行积分，得

$$\begin{aligned}&\int_0^l X_j(x)[EI(x)X_i''(x)]''\mathrm{d}x\\&=X_j(x)[EI(x)X_i''(x)]'\big|_0^l-X_j'(x)EI(x)X_i''(x)\big|_0^l\\&\quad+\int_0^l EI(x)X_j''(x)X_i''(x)\mathrm{d}x\\&=p_i^2\int_0^l\rho(x)X_i(x)X_j(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{6.6.10}$$

再对式(6.6.9)乘以$X_i(x)\mathrm{d}x$,然后在$0<x<l$上对$x$进行积分,得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l X_i(x)[EI(x)X_j''(x)]''\mathrm{d}x \\
&\quad = X_i(x)[EI(x)X_j''(x)]'\big|_0^l - X_i'(x)EI(x)X_j''(x)\big|_0^l \\
&\qquad + \int_0^l EI(x)X_i''(x)X_j''(x)\mathrm{d}x \\
&\quad = p_j^2\int_0^l \rho(x)X_i(x)X_j(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{6.6.11}
$$

式(6.6.10)与式(6.6.11)相减,可得

$$
\begin{aligned}
&(p_i^2 - p_j^2)\int_0^l \rho(x)X_i(x)X_j(x)\mathrm{d}x \\
&\quad = \{X_j(x)[EI(x)X_i''(x)]' - X_j'(x)EI(x)X_i''(x) \\
&\qquad - X_i(x)[EI(x)X_j''(x)]' + X_i'(x)EI(x)X_j''(x)\}\big|_0^l
\end{aligned}
\tag{6.6.12}
$$

可以看到,如果以式(6.6.5)~(6.6.7)中任意两个式子组合成梁的边界条件,那末式(6.6.12)右端都将等于零。所以,在这情形下,就有

$$(p_i^2 - p_j^2)\int_0^l \rho(x)X_i(x)X_j(x)\mathrm{d}x = 0$$

但前面已经假设$p_i \neq p_j$,故有

$$\int_0^l \rho(x)X_i(x)X_j(x)\mathrm{d}x = 0,\quad i \neq j \tag{6.6.13}$$

正是在这一意义上,我们称振型函数$X_i(x)$与$X_j(x)$关于质量密度$\rho(x)$正交。数学上,亦称以$\rho(x)$为权的加权正交,以区别于$\rho(x)$等于常数时,$X_i(x)$与$X_j(x)$所具有的通常意义下的正交性:

$$\int_0^l X_i(x)X_j(x)\mathrm{d}x = 0,\quad i \neq j$$

考虑到式(6.6.13),从式(6.6.10)或式(6.6.11)都可以看到,在上述边界条件下,有

$$\int_0^l EI(x)X_i''(x)X_j''(x)\mathrm{d}x = 0, \quad i \neq j \qquad (6.6.14)$$

由此可见，梁弯曲振动振型函数关于刚度 $EI(x)$ 的正交性，实际上是振型函数的二阶导数所具有的正交性。

当 $i = j$ 时，式(6.6.12) 自然满足。这时，可记下列积分为

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^l \rho(x)X_i^2(x)\mathrm{d}x \equiv M_i \\ &\int_0^l EI(x)[X''(x)]^2\mathrm{d}x \equiv K_i \end{aligned}\right\} \qquad (6.6.15)$$

$M_i$ 称为第 $i$ 阶振型的广义质量，$K_i$ 称为第 $i$ 阶振型的广义刚度。由式(6.6.10) 或式(6.6.11) 不难看到，有

$$K_i/M_i = p_i^2$$

2. 梁的边界条件中含有非基本边界条件的情形

当梁的边界条件中含有非基本边界条件时，振型函数的正交关系需要修正。比如：

当梁的 $l$ 端为弹性支承时，边界条件为

$$EI(l)X''(l) = 0$$

$$[EI(x)X''(x)]'\,|_{x=l} = kX(l)$$

将它代入式(6.6.12) 与式(6.6.10)，可得

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^l \rho(x)X_i(x)X_j(x)\mathrm{d}x = 0 \\ &\int_0^l EI(x)X_i''(x)X_j''(x)\mathrm{d}x + kX_i(l)X_j(l) = 0, \quad i \neq j \end{aligned}\right\} \qquad (6.6.16)$$

又当梁的 $l$ 端具有附加质量时，边界条件为

$$EI(l)X''(l) = 0$$

$$[EI(x)X''(x)]'\,|_{x=l} = -mp^2X(l)$$

将它代入式(6.6.12) 与式(6.6.10)，可得

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^l \rho(x)X_i(x)X_j(x)\mathrm{d}x + mX_i(l)X_j(l) = 0, \quad i \neq j\\&\int_0^l EI(x)X_i''(x)X_j''(x)\mathrm{d}x = 0\end{aligned}\right\}$$

(6.6.17)

## 6.7 连续系统的动响应

在离散系统的动响应分析中，我们利用主振型的正交性，使微分方程解耦，从而使多自由度系统的动响应分析可以转化为多个单自由度系统的模态响应问题。在求得各模态的响应后，再进行叠加，就可以得到原系统的响应。这种模态分析方法也称主振型叠加法。

对于具有无限多自由度的连续系统，也可以用这种方法来求系统的动响应。下面我们还是用梁的弯曲振动为例来说明这一过程。

设有弯曲刚度为 $EI(x)$，质量分布密度为 $\rho(x)$ 的梁。在分布载荷 $p(x,t)$ 的作用下，梁的弯曲振动微分方程(6.4.4)可改写为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)\right] + \rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = p(x,t) \tag{6.7.1}$$

梁的各阶振型函数 $X_i(x)$ 满足下列方程

$$[EI(x)X_i''(x)]'' - p_i^2\rho(x)X_i(x) = 0 \tag{6.7.2}$$

和相应的边界条件。对于基本边界条件，振型函数也满足下列正交关系

$$\int_0^l \rho(x)X_i(x)X_j(x)\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & i \neq j\\ M_i, & i = j\end{cases} \tag{6.7.3}$$

$$\int_0^l EI(x)X_i''(x)X_j''(x)\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & i \neq j\\ K_i, & i = j\end{cases} \tag{6.7.4}$$

现设方程(6.7.1)的解可以表示为振型函数的无穷级数，即

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}X_i(x)q_i(t) \tag{6.7.5}$$

其中各 $q_i(t)$ 可以看做系统的广义坐标(相当于多自由度系统中的主坐标)。下面用拉格朗日方程来推导各广义坐标满足的运动微分方程。

首先来看系统功能的表示式。由式(6.7.5)，梁各点的速度可表示为

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)=\sum_i X_i(x)\dot{q}_i(t)$$

考虑到式(6.7.3)，系统的动能可表示为

$$\begin{aligned}E_\mathrm{k}&=\frac{1}{2}\int_0^l\rho(x)\left[\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\right]^2\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^l\rho(x)\Big(\sum_i X_i(x)\dot{q}_i\Big)\Big(\sum_j X_j(x)\dot{q}_j\Big)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\dot{q}_i\dot{q}_j\int_0^l\rho(x)X_i(x)X_j(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\sum_i M_i\dot{q}_i^2\end{aligned} \tag{6.7.6}$$

式中

$$M_i\equiv\int_0^l\rho(x)X_i^2(x)\mathrm{d}x$$

$M_i$ 称为对应于广义坐标 $q_i$ 的广义质量。

再来看系统的势能表示式。只考虑梁的弯曲势能，由式(6.7.5)，梁各截面上的弯矩 $M(x)$ 可表示为

$$\begin{aligned}M(x)&=EI(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)\\&=EI(x)\sum_i X_i''(x)q_i(t)\end{aligned}$$

$$E_\mathrm{p}=\frac{1}{2}\int_0^l EI(x)\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)\right]^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)\Big(\sum_i X_i''(x)q_i\Big)\Big(\sum_j X_j''(x)q_j\Big)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i\sum_j q_iq_j\int_0^l EI(x)X_i''(x)X_j''(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i K_iq_i^2 \qquad (6.7.7)$$

式中

$$K_i \equiv \int_0^l EI(x)[X_i''(x)]^2\mathrm{d}x$$

$K_i$ 称为对应于广义坐标 $q_i$ 的广义刚度。且有

$$K_i = p_i^2M_i$$

然后来看广义力 $Q_i$。由式(6.7.5),梁的虚位移可表示为

$$\delta y(x) = \sum_i X_i(x)\delta q_i$$

梁的分布载荷 $p(x,t)$ 在上述虚位移上所做的虚功为

$$\delta W = \int_0^l p(x,t)\Big[\sum_i X_i(x)\delta q_i\Big]\mathrm{d}x$$

$$= \sum_i\delta q_i\int_0^l p(x,t)X_i(x)\mathrm{d}x$$

$$\equiv \sum_i Q_i\delta q_i \qquad (6.7.8)$$

式中,定义了广义力 $Q_i$ 为

$$Q_i \equiv \int_0^l p(x,t)X_i(x)\mathrm{d}x \qquad (6.7.9)$$

将上面得到的动能 $E_\mathrm{k}$、势能 $E_\mathrm{p}$ 以及广义力 $Q_i$ 的表示式代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{k}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{k}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial q_i} = Q_i \qquad (6.7.10)$$

可得广义坐标 $q_i$ 的下列运动微分方程

$$\ddot{q}_i(t) + p_i^2q_i(t) = Q_i(t)/M_i, \quad i = 1,2,3,\cdots \qquad (6.7.11)$$

方程(6.7.11)即是广义坐标 $q_i(t)$ 应满足的方程,它的解可利用 1

自由度系统讨论的结果得到。

假设梁的初始条件为

$$y(x,0)=\sum_{i=1}^{\infty}q_i(0)X_i(x)=f(x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,0)=\sum_{i=1}^{\infty}\dot{q}_i(0)X_i(x)=g(x)$$

则利用振型函数的正交性，得到用广义坐标表示的初始条件为

$$\left.\begin{aligned}q_i(0)&=\frac{1}{M_i}\int_0^l\rho(x)f(x)X_i(x)\mathrm{d}x\\ \dot{q}_i(0)&=\frac{1}{M_i}\int_0^l\rho(x)g(x)X_i(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\right\}\tag{6.7.12}$$

于是，方程(6.7.11)的通解可确定为

$$q_i(t)=q_i(0)\cos p_it+\frac{\dot{q}_i(0)}{p_i}\sin p_it+\frac{1}{M_ip_i}\int_0^tQ_i(\tau)\sin p_i(t-\tau)\mathrm{d}\tau\tag{6.7.13}$$

将上式代入式(6.7.5)中，得到梁在初始激扰及广义力作用下的响应，即

$$\begin{aligned}y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}X_i(t)\Big[&q_i(0)\cos p_it+\frac{\dot{q}_i(0)}{p_i}\sin p_it\\&+\frac{1}{M_ip_i}\int_0^tQ_i(\tau)\sin p_i(t-\tau)\mathrm{d}\tau\Big]\end{aligned}\tag{6.7.14}$$

**讨论：**

(1) 如果作用在梁上的载荷不是分布力，而是作用在梁上某点 $x_1$ 处的集中力 $P(t)$，那末利用 $\delta$ 函数，可将集中力的分布集度表示为

$$p(x,t)=P(t)\delta(x-x_1)$$

(2) 在方程(6.7.11)中，要遇到积分

$$\int_0^lp(x,t)X_i(x)\mathrm{d}x$$

因为 $X_i(x)$ 包含有双曲函数，所以要完成这个积分有时是比较困

难的，常借助于数值积分完成。对集中力来说，利用 $\delta$ 函数的性质，可以避免这一困难。

**例 6.7.1** 均匀简支梁在 $t=0$ 时除两个端点外，其它各点均获得横向初速度 $v$，求此后梁的响应。

**解** 均匀简支梁的固有频率为

$$p_i=(\frac{i\pi}{l})^2\sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

相应的振型函数为

$$X_i(x)=\sin\frac{i\pi}{l}X$$

第 $i$ 阶振型的广义质量 $M_i$ 为

$$M_i=\int_0^l \rho X_i^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\rho l$$

设梁的自由振动可表示为

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}X_i(x)q_i(t) \tag{a}$$

广义坐标 $q_i(t)$ 所满足的方程为

$$\ddot{q}_i(t)+p_i^2q_i(t)=0 \tag{b}$$

由初始条件

$$y(x,0)=0,\quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=v,\quad 0<x<l$$

得

$$\left.\begin{aligned}&q_i(0)=0\\&\dot{q}_i(0)=\frac{1}{M_i}\int_0^l\rho X_i(x)v\mathrm{d}x=\frac{4v}{i\pi},\quad i=1,2,\cdots\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

所以，方程$(b)$ 的解为

$$q_i(t)=\frac{4v}{i\pi p_i}\sin p_it,\quad i=1,2,\cdots$$

最后，由式$(a)$ 得梁的响应为

$$y(x,t)=\frac{4v}{\pi}\sum_{i=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{ip_i}\sin(\frac{i\pi}{l}x)\sin p_it$$

**例 6.7.2**　均匀简支梁在 $x=x_1$ 处作用有一正弦扰力 $P\sin\omega t$，如图 6.7.1 所示。试求梁的动响应。假定梁的初始位移和初始速度均为零。

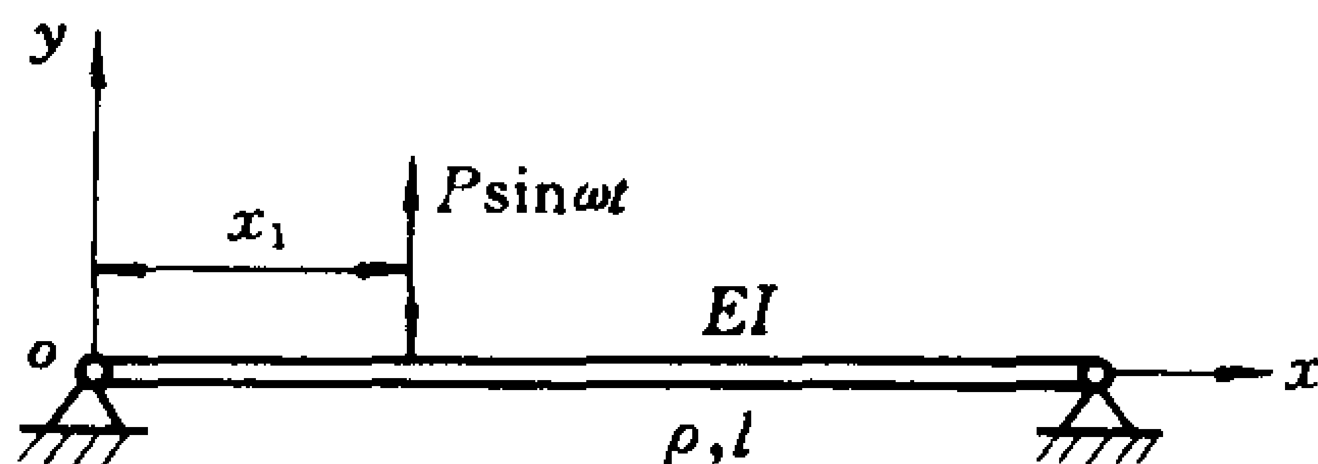



图 6.7.1　动载下的梁

**解**　梁的固有频率、振型函数和广义质量均与上例相同。作用在 $x=x_1$ 处的集中力可表示为

$$p(x,t)=P\sin\omega t\delta(x-x_1)$$

式中 $\delta(x)$ 为 $\delta$ 函数。于是，广义为 $Q_i$ 为

$$\begin{aligned}Q_i(t)&=\int_0^l p(x,t)X_i(x)\mathrm{d}x\\&=P\sin\omega t\int_0^l\sin\frac{i\pi x}{l}\delta(x-x_1)\mathrm{d}x\\&=P\sin\frac{i\pi x_1}{l}\sin\omega t\end{aligned}$$

所以，广义坐标 $q_i$ 的运动微分方程为

$$\ddot{q}_i+p_i^2q_i=\frac{2P}{\rho l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\sin\omega t$$

上述方程对应零初始条件的解为

$$\begin{aligned}q_i(t)&=\frac{1}{p_i}\frac{2P}{\rho l}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\int_0^t\sin\omega\tau\cdot\sin p_i(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{2P\sin\dfrac{i\pi x_1}{l}}{\rho l(p_i^2-\omega^2)}(\sin\omega t-\frac{\omega}{p_i}\sin p_it)\end{aligned}$$

梁以物理坐标表示的动响应 $y(x,t)$ 为

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}X_i(x)q_i(t)$$

$$= \frac{2P}{\rho l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi x_1}{l}}{p_i^2-\omega^2}\sin\frac{i\pi x}{l}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{p_i}\sin p_i t\right)$$

上式括号中的第二项是扰力激起的自由振动。由于实际系统总存在着阻尼，所以这部分自由振动将随着时间很快消失，剩下的稳态响应为

$$y(x,t)=\frac{2P}{\rho l}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i^2-\omega^2}\sin\frac{i\pi x_1}{l}\sin\frac{i\pi x}{l}\sin\omega t$$

**例 6.7.3** 均匀简支梁受图 6.7.2 所示的突加分布载荷 $p(x,t)=\frac{cx}{l}F(t)$ 的作用，求梁的动响应。

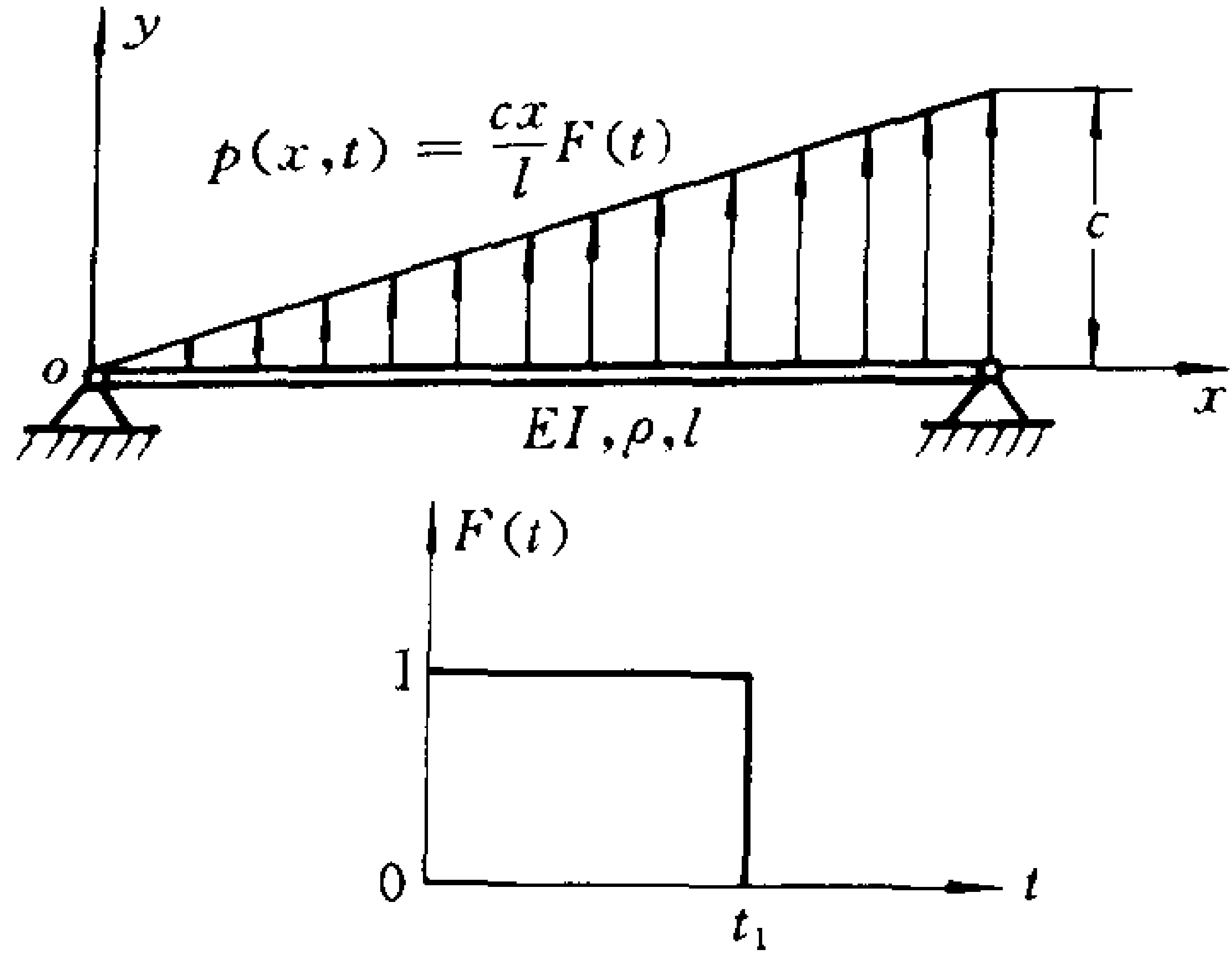



图 6.7.2 动载的时空变化

**解** 简支梁的固有频率、振型函数和广义质量在例 7.6.2 中已经确定，现将梁的动响应表示为

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}X_i(x)q_i(t)$$

广义坐标 $q_i(t)$ 所满足的微分方程为

$$\ddot{q}_i+p_i^2q_i=\frac{1}{M_i}Q_i(t)$$

其中广义力 $Q_i(t)$ 为

$$Q_i(t)=\int_0^l p(x,t)X_i(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{c}{l}F(t)\int_0^l x\sin\frac{i\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{c}{l}F(t)\left[\frac{\sin\frac{i\pi x}{l}}{(i\pi/l)^2} - \frac{x\cos\frac{i\pi x}{l}}{i\pi/l}\right]_0^l$$

$$= -\frac{cl}{i\pi}F(t)\cos i\pi$$

$$= (-1)^{i-1}\frac{cl}{i\pi}F(t)$$

故广义坐标 $q_i(t)$ 的运动微分方程为

$$\ddot{q}_i + p_i^2 q_i = (-1)^{i+1}\frac{2c}{i\pi\rho}F(t)$$

对应零初始条件，上述方程的解为

$$q_i(t) = \begin{cases} (-1)^{i+1}\dfrac{2c}{i\pi\rho p_i^2}(1-\cos p_i t), & 0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ (-1)^{i+1}\dfrac{2c}{i\pi\rho p_i^2}[\cos p_i(t-t_1) - \cos p_i t], & t \geqslant t_1 \end{cases}$$

故梁的动响应可确定为

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sin\frac{i\pi x}{l}q_i(t)$$

## 6.8　薄膜的振动

本节我们介绍最简单的二维弹性体——薄膜——的振动。薄膜是指一块绷紧的弹性薄片，它的厚度很小，以至不能抵抗弯曲变形。这样，与 6.2 节中讨论的弦类似，薄膜中的内力只有薄膜张力。设薄膜单位面积上的质量为 $\rho$，单位长度上的膜力为 $T$。取 $oxy$ 平面位于膜平面内，并设膜上任何点沿 $z$ 方向的位移 $w$ 很小，因此张力 $T$ 可认为是常量。

为建立薄膜横向振动的微分方程，在膜上取一微元 $dxdy$，如图 6.8.1 所示。在 $dy$ 边上沿 $Z$ 方向的合力近似为

$$T\mathrm{d}y\left(\theta + \frac{\partial\theta}{\partial x}\mathrm{d}x\right) - T\mathrm{d}y\theta = T\frac{\partial\theta}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

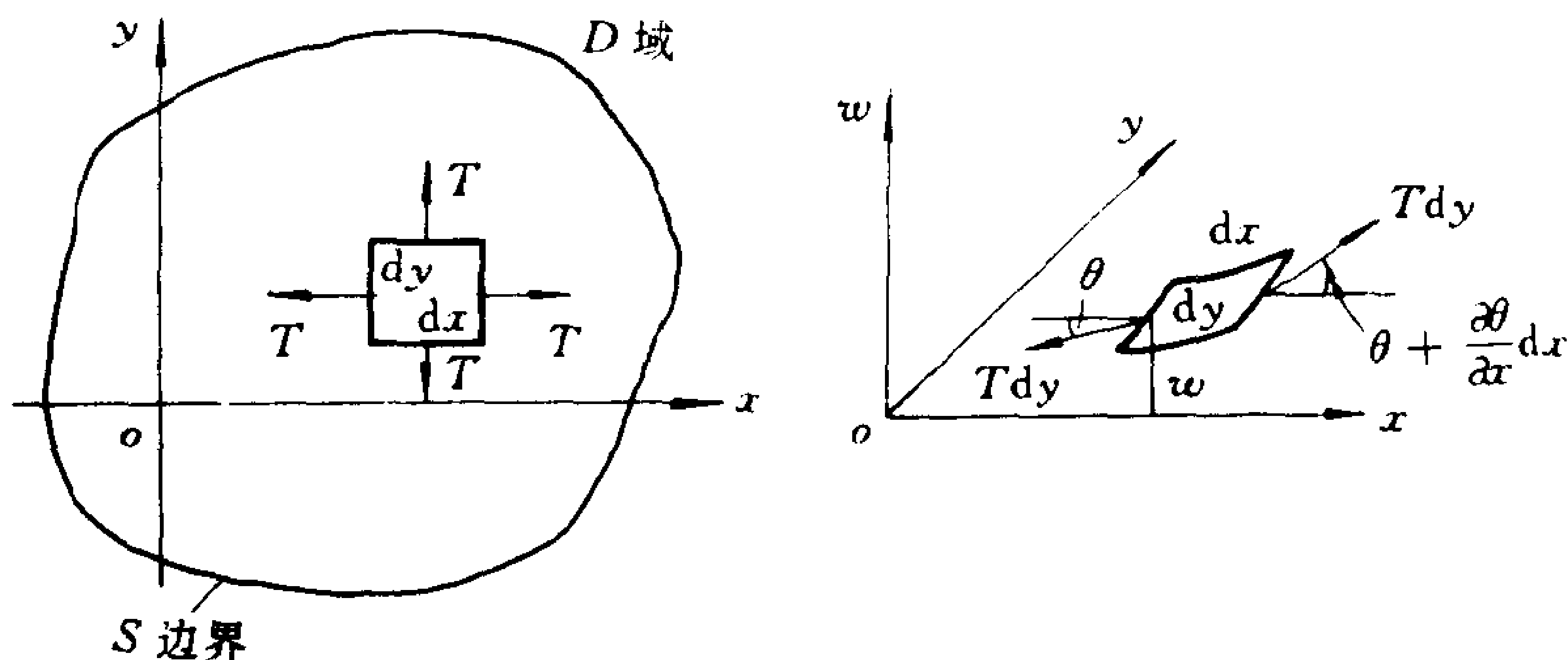



图 6.8.1 薄膜的振动

类似地，在 $\mathrm{d}x$ 边上沿 $Z$ 方向的合力为 $T\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。因为沿 $x$、$y$ 方向的斜率分别为 $\theta=\frac{\partial w}{\partial x}$，$\varphi=\frac{\partial w}{\partial y}$，所以，薄膜沿 $z$ 方向的合力为

$$T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是，薄膜横向振动的微分方程为

$$\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+p(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=T\nabla^2 w+p(x,y,t) \tag{6.8.1}$$

式中 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 是拉普拉斯算子，$p(x,y,t)$ 是薄膜承受的分布横向载荷。当外激扰力 $p(x,y,t)\equiv 0$ 时，系统作自由振动。自由振动的微分方程为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 w \tag{6.8.2}$$

式中 $c^2=\frac{T}{\rho}$。方程(6.8.2) 也称二维波动方程。

下面我们以周边固定的矩形薄膜(图 6.8.2)为例来讨论方程(6.8.2)的解。对四边固定的矩形膜,其边界条件可表示为

$$w(\xi,y,t)=0,\quad \xi=0,a \tag{6.8.3}$$

和

$$w(x,\xi,t)=0,\quad \xi=0,b \tag{6.8.4}$$

与讨论其它弹性体振动问题一样,这里仍采用分离变量法去寻求方程(6.8.2)满足边界条件(6.8.3)和(6.8.4)的解。首先假定 $w(x,y,t)$ 可分离为振型函数 $W(x,y)$ 和时间函数 $T_1(t)$,即

$$w(x,y,t)=W(x,y)T_1(t) \tag{6.8.5}$$

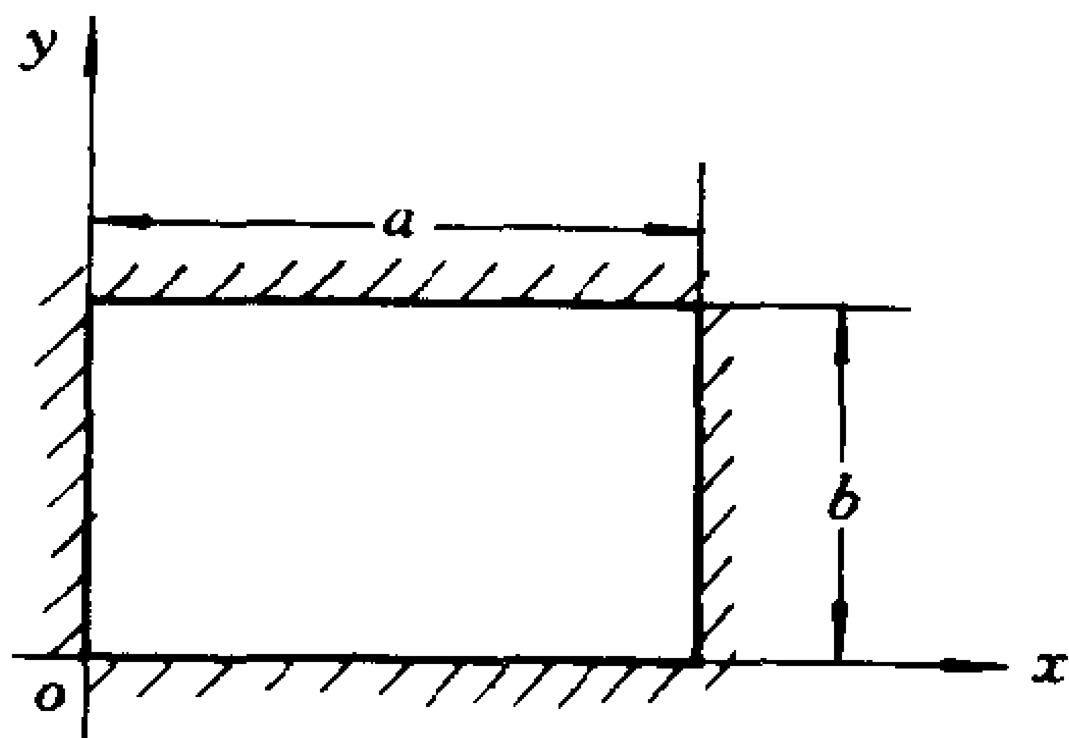



图 6.8.2　矩形薄膜

由于自由振动是简谐振动,将上式代入方程(6.8.2),得到系统的特征值问题为

$$\nabla^2 W(x,y)+\beta^2 W(x,y)=0 \tag{6.8.6}$$

式中 $\beta^2=(p/c)^2$。将式(6.8.5)代入式(6.8.3)和(6.8.4)中,可将边界条件表示为

$$W(\xi,y)=0,\quad \xi=0,a \tag{6.8.7}$$

和

$$W(x,\xi)=0,\quad \xi=0,b \tag{6.8.8}$$

再假设方程(6.8.6)的解有如下形式

$$W(x,y)=X(x)Y(y) \tag{6.8.9}$$

代入方程(6.8.6)中,得到

$$\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}Y(y)+X(x)\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}+\beta^2X(x)Y(y)=0$$

或

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}+\beta^2=0$$

由此导致

$$\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}+\alpha^2X(x)=0 \tag{6.8.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y}+\gamma^2Y(y)=0 \tag{6.8.11}$$

其中

$$\alpha^2+\gamma^2=\beta^2 \tag{6.8.12}$$

方程(6.8.10)的解为

$$X(x)=c_1\sin\alpha x+c_2\cos\alpha x \tag{6.8.13}$$

方程(6.8.11)的解为

$$Y(y)=c_3\sin\gamma y+c_4\cos\gamma y \tag{6.8.14}$$

因此有

$$\begin{aligned}W(x,y)=&A_1\sin\alpha x\sin\gamma y+A_2\sin\alpha x\cos\gamma y\\&+A_3\cos\alpha x\sin\gamma y+A_4\cos\alpha x\cos\gamma y\end{aligned} \tag{6.8.15}$$

这里特征值 $\alpha,\gamma$ 及各积分常数由边界条件决定。将边界条件(6.8.7)中 $\xi=0,a$ 代入上式,有

$$A_3\sin\gamma y+A_4\cos\gamma y=0 \tag{6.8.16}$$

$$A_1\sin\alpha a\sin\gamma y+A_2\sin\alpha a\cos\gamma y=0 \tag{6.8.17}$$

将边界条件(6.8.8)中 $\xi=0,b$ 分别代入式(6.8.15)中,有

$$A_2\sin\alpha x+A_4\cos\alpha x=0 \tag{6.8.18}$$

$$A_1\sin\alpha x\sin\gamma b+A_3\cos\alpha x\sin\gamma b=0 \tag{6.8.19}$$

为寻求方程组(6.8.16) ~ (6.8.19)中 $A_i(i=1,2,3,4)$ 的非零解,应有

$$\sin\alpha a=0 \tag{6.8.20}$$

$$\sin\gamma b=0 \tag{6.8.21}$$

同时,要使方程组(6.8.16) ~ (6.8.19)在整个边界上成立,还应有 $A_2=A_3=A_4=0$。方程(6.8.20)和(6.8.21)称做特征方程,由此可以求出

$$\alpha_m=\frac{m\pi}{a},\quad m=1,2,\cdots \tag{6.8.22}$$

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{b},\quad n = 1,2,\cdots \tag{6.8.23}$$

因此,系统具有双无穷个特征值,它们是

$$\beta_{mn} = \sqrt{\alpha_m^2 + \gamma_n^2} = \pi\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}\qquad m,n = 1,2,\cdots \tag{6.8.24}$$

利用 $p^2 = \beta^2 T/\rho$,可得系统的固有频率为

$$p_{mn} = \pi\sqrt{\left[(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2\right]\frac{T}{\rho}}\qquad m,n = 1,2,\cdots \tag{6.8.25}$$

相应的振型函数为

$$W_{mn}(x,y) = A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\quad m,n = 1,2,\cdots \tag{6.8.26}$$

前 4 阶振型函数见图 6.8.3。由图可见,**节线**(在振动中,挠度为零的各点连成的曲线)是直线,并且平行于 $x$ 轴的节线数目是 $n-1$,平行于 $y$ 轴的节线数是 $m-1$。

当比值 $R = \frac{a}{b}$ 为有理数时,可能存在固有频率的重根,$p_{mn} = p_{rs}$。出现重固有频率的条件是

$$m^2 + n^2R^2 = r^2 + s^2R^2 \tag{6.8.27}$$

在这种情况下,两个不同的振型函数 $W_{mn}(x,y)$ 和 $W_{rs}(x,y)$ 对应于同一个固有频率。因此,$W_{mn}$ 和 $W_{rs}$ 的任意线性组合也是对应此固有频率的振型函数。这种情况称为**退化**。在退化的情形下,节线未必是直线,将会是多种节线形式。例如:对于方膜,$R = a/b = 1$,$p_{12}$ 和 $p_{21}$ 是一对重根,并有

$$p_{12} = p_{21} = \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{5T}{\rho}}$$

但相应的振型函数则不同:

与 $p_{12}$ 对应的振型函数为

$$W_{12}(x,y) = A_{12}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}$$

与 $p_{21}$ 对应的振型函数为

$$W_{21}(x,y) = A_{21}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$$

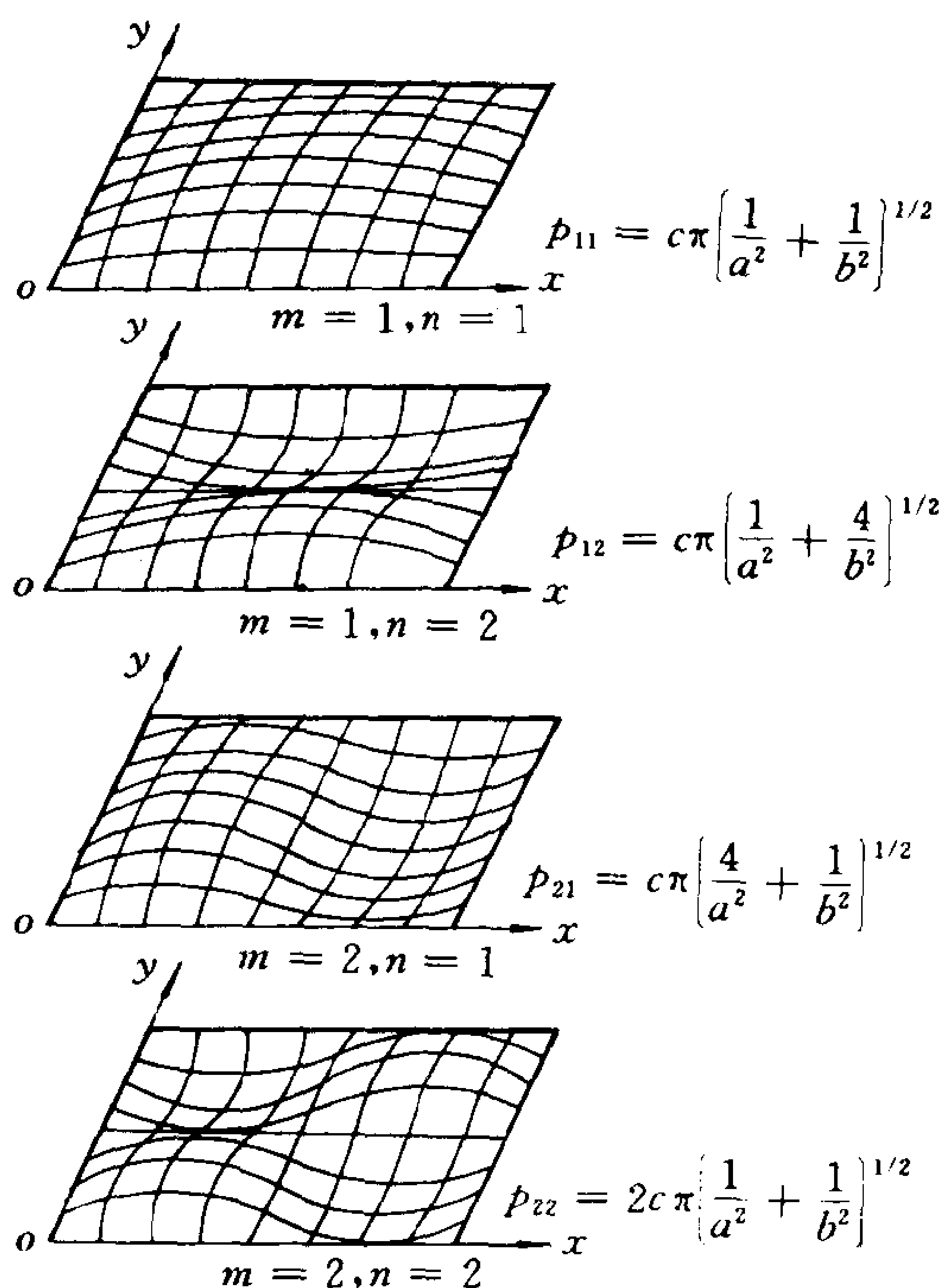



图 6.8.3 振型函数

图 6.8.4($a$) 及图 6.8.4($b$) 分别示出了两个振型的节线位置。作 $W_{12}$ 与 $W_{21}$ 的线性组合。

$$W(x,y)=A_{12}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}$$
$$+A_{21}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}$$

它也是对应 $p_{12}=p_{21}$ 的振型函数。现在来观察四种特殊情况：

(1) $A_{12}=0$，即 $W=W_{21}$（见图 6.8.4(*b*)）。

(2) $A_{21}=0$，即 $W=W_{12}$（见图 6.8.4(*a*)）。

(3) $A_{12}=A_{21}$，此时

$$W(x,y)=2A_{12}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}(\cos\frac{\pi y}{a}+\cos\frac{\pi x}{a})$$

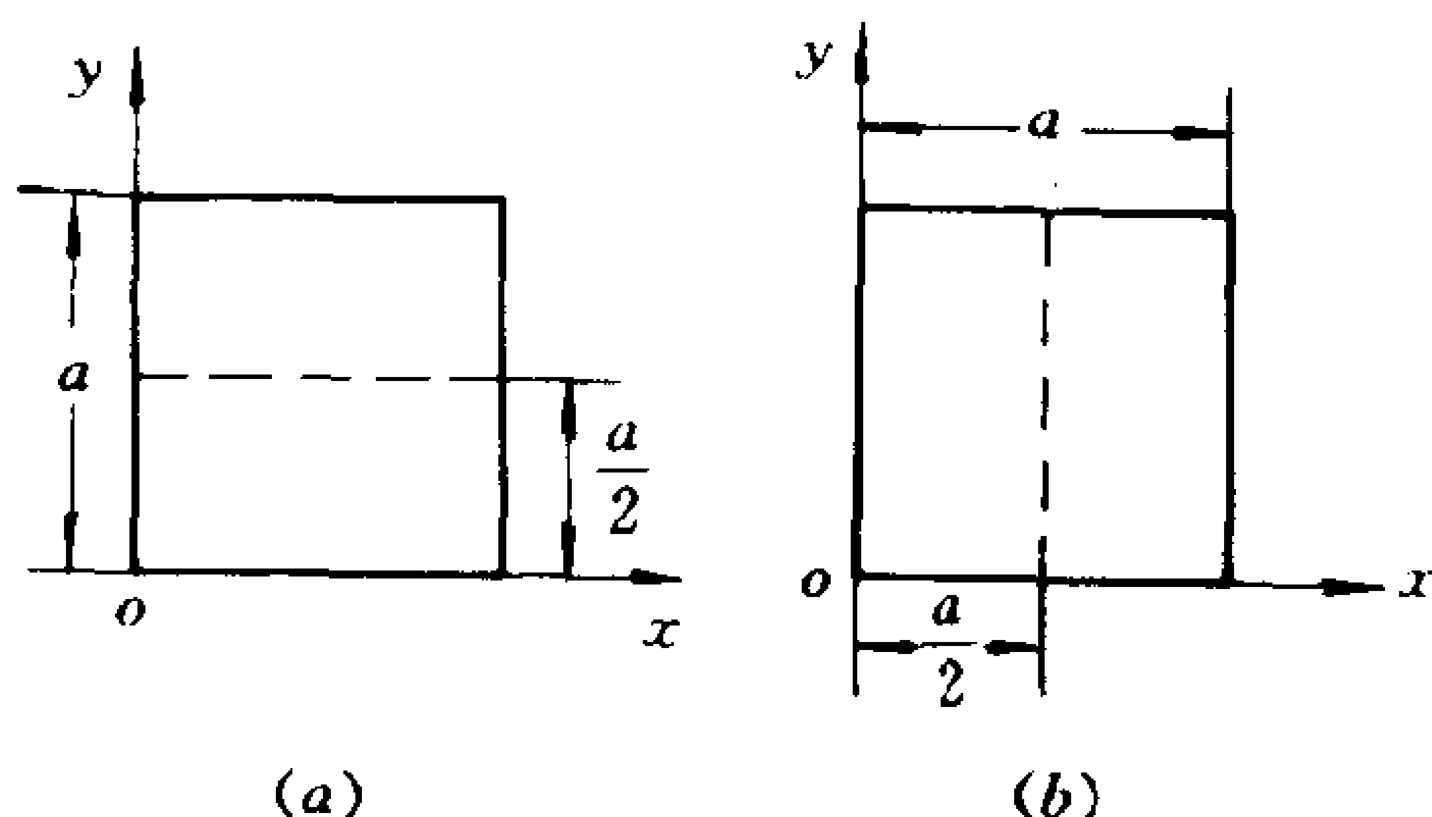



图 6.8.4　方膜节线(一)

$W(x,y)$ 在下列三种情况下为零，即

$$\sin\frac{\pi x}{a}=0\text{ 或 }\sin\frac{\pi y}{a}=0\text{ 或 }\cos\frac{\pi x}{a}+\cos\frac{\pi y}{a}=0$$

前面两个条件表示边界上 $W(x,y)=0$。我们关心的是第三个条件

$$\cos\frac{\pi x}{a}+\cos\frac{\pi y}{a}=0$$

由此可解出

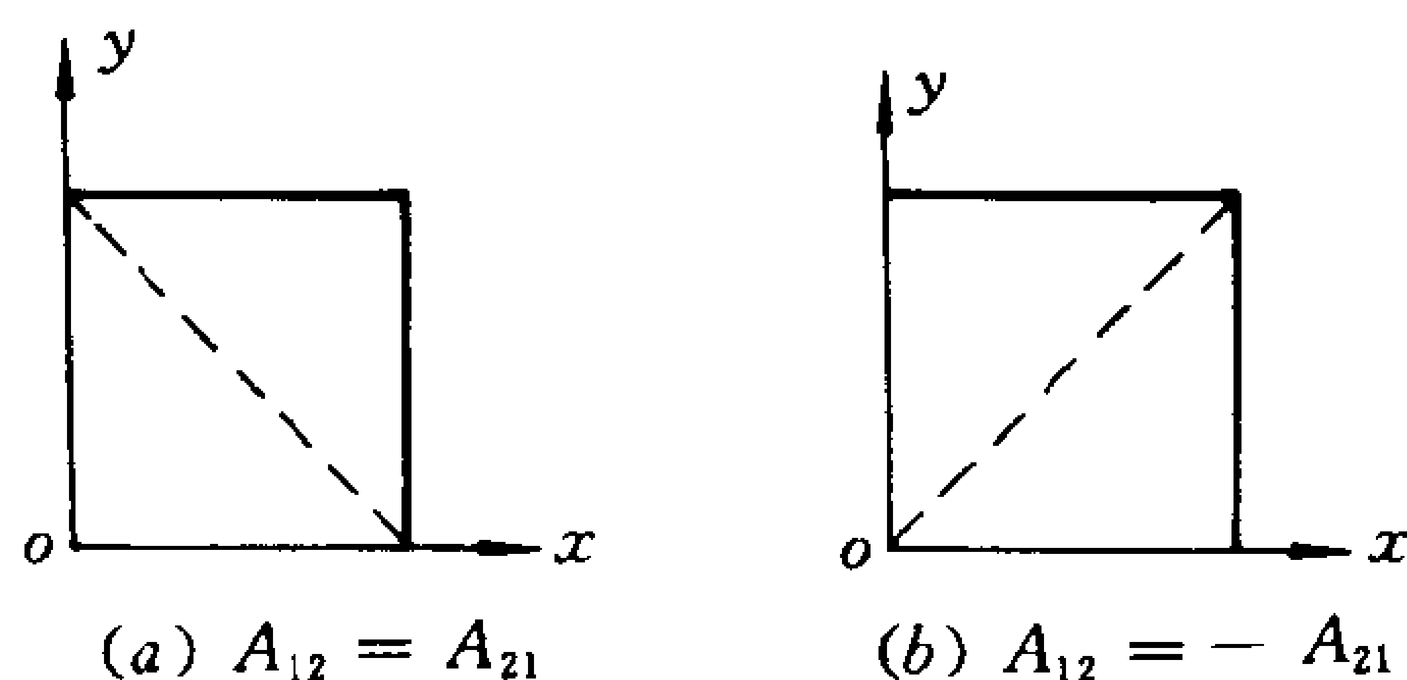
$$\frac{\pi x}{a}=\pi-\frac{\pi y}{a}$$

即节线方程为

$$x + y = a$$

见图 6.8.5($a$)。

(4) $A_{12} = -A_{21}$,类似地可得到节线方程为 $x = y$,见图 6.8.5($b$)。




($a$) $A_{12} = A_{21}$　　($b$) $A_{12} = -A_{21}$

图 6.8.5　方膜节线(二)

以上我们只就一种特殊情形进行了讨论,有关二维弹性体的振动,读者可参阅结构动力学的有关专著[1][2]。

## 6.9　杂交系统的振动

杂交系统是由连续子结构(如梁、轴、薄板或薄壳等)与多个离散的线性振子连接而成的系统。例如,在考察大型火箭的纵向振动时就可以把它抽象为一个杂交系统,火箭壳体可看做一连续梁,而安装在火箭内的发动机、燃料箱、氧化剂箱、弹头等可看做离散的线性振子。

杂交系统的振动问题涉及混合型(偏微加常微)微分方程的边值问题。采用分离变量法,同样也可以将此问题化为常微分方程

---

① Meirowitch L. Analytical Method in Vibration. Macmillan, 1967

② Soedel W. Vibrations of Shells and Plates. Marcel Dekker, 1981

的边值问题。我们用欧拉梁与线性振子构成的杂交系统作为例子来说明这一类振动问题的分析方法。

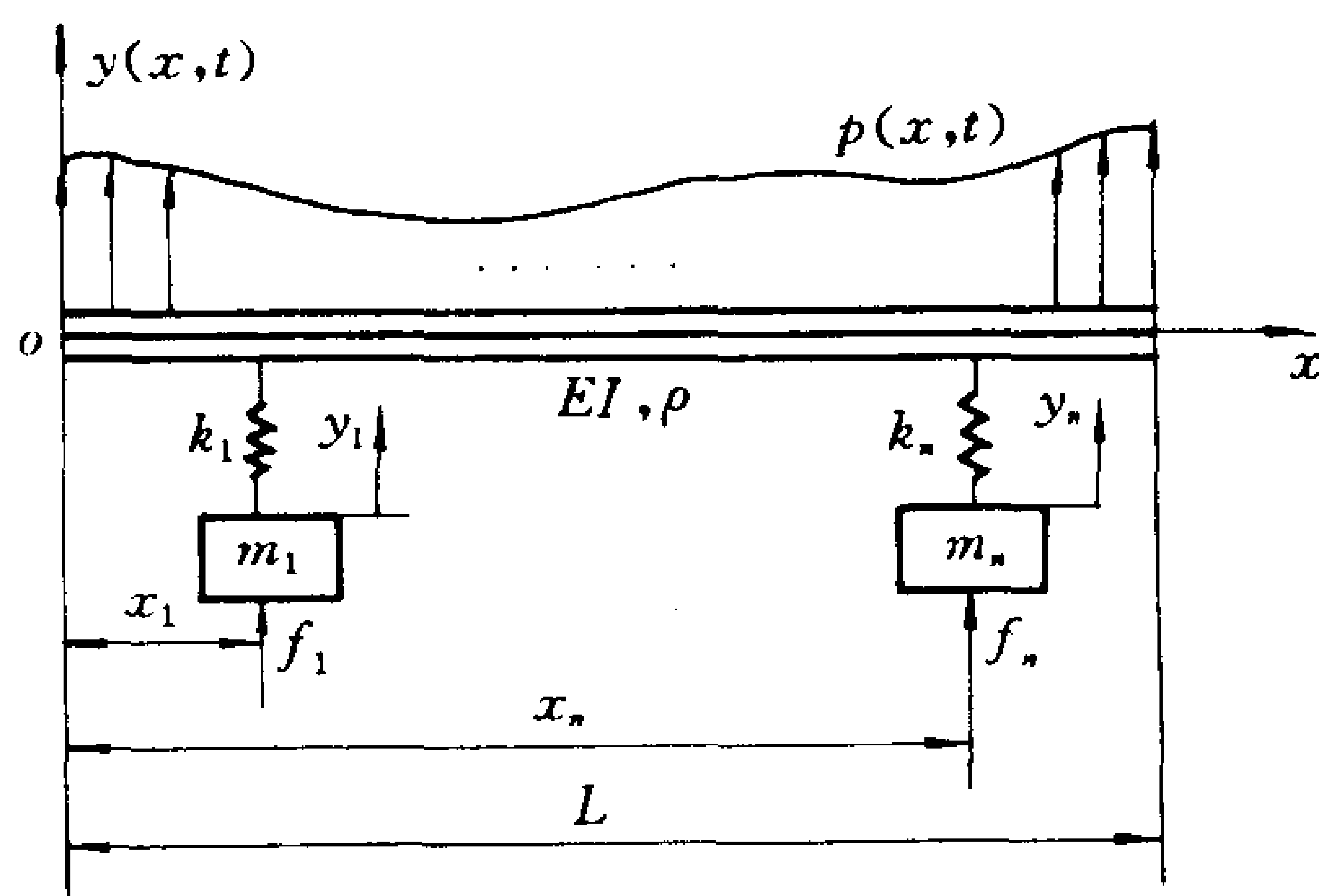



图 6.9.1　杂交系统模型

考察一根长 $l$、抗弯刚度为 $EI$ 的均匀梁，在 $x=x_i, i=1,\cdots,n$ 处与 $n$ 个线性谐振子相连而组成的杂交系统，如图 6.9.1 所示。这时，系统的运动微分方程可表示为

$$EIy^{(4)}(x,t)+\rho\ddot{y}(x,t)=\sum_{i=1}^{m}P_i(t)\delta(x-x_i)+p(x,t) \quad (6.9.1)$$

$$m_i\ddot{y}_i(t)+k_iy_i(t)-k_iy(x_i,t)=f_i(t),\quad i=1,\cdots,n \quad (6.9.2)$$

且有

$$P_i(t)=k_iy_i(t)-k_iy(x_i,t)=-m_i\ddot{y}_i(t)+f_i(t),\quad i=1,\cdots,n \quad (6.9.3)$$

上列方程中，有

$EI,\rho$ —— 分别是梁的抗弯刚度，单位长度的质量；

$y(x,t)$—— 梁的横向位移；

$y_i(t)$—— 第 $i$ 个振子的位移；

$m_i, k_i$ —— 分别是第 $i$ 个振子的质量与刚度；；

$p(x,t)$ —— 作用在梁上的分布力；

$f_i(t)$ —— 第 $i$ 个振子的激励。

而 $\delta(x-x_i)$ 是 Dirac$\delta$ 函数，它的量纲是 $L^{-1}$。这里，($'$) 表示关于坐标求偏导，($\dot{}$) 表示关于时间求偏导。

在考察系统的自由振动时，可令所有激励 $p(x,t)$ 与 $f_i(t)$ 都等于零，再记 $\beta_i^4 \equiv k_i/m_i$，有

$$EIy''''(x,t) + \rho\ddot{y}(x,t) = -\sum_i m_i\ddot{y}_i(t)\delta(x-x_i) \quad (6.9.4)$$

$$\ddot{y}_i(t) + \beta_i^4 y_i(t) = \beta_i^4 y(x_i,t) \quad (6.9.5)$$

利用分离变量法求解，可假设

$$y(x,t) = Y(x)\sin(\alpha^2 t)$$

$$y_i(t) = B_i Y(x_i)\sin(\alpha^2 t)$$

其中 $Y(x)$ 是待定的固有振型函数，$\alpha^2$ 是待定的固有频率，且由式(6.9.5)，有

$$B_i = \beta_i^4/(\beta_i^4 - \alpha^4)$$

于是，方程(6.9.4)可表示为

$$EIY''''(x) - \rho\alpha^4 Y(x) = \sum_i m_i B_i \alpha^4 Y(x_i)\delta(x-x_i)$$

或写成

$$Y''''(x) - \lambda^4 Y(x) = \sum_i \overline{m}_i B_i(\lambda)\lambda^4 Y(x_i)\delta(x-x_i) \quad (6.9.6)$$

其中

$$\lambda^4 = \alpha^4\rho/EI, \quad \overline{m}_i = m_i/\rho$$

$$B_i(\lambda) = \beta_i^4/(\beta_i^4 - \lambda^4 EI/\rho)$$

式(6.9.6)为关于待定固有振型函数的常微分方程。它可以看做"分布斥力场中的欧拉梁"在多个集中载荷作用下的静力弯曲问

题。它的解可以用梁的格林(Green)函数来表示。该**格林函数** $G(x;x_i,\lambda)$ 应满足下述方程

$$G'''' - \lambda^4 G = \delta(x - x_i) \tag{6.9.7}$$

并满足指定的边界条件。这时，确定各个未知变量 $Y(x_i), i = 1, \cdots, n$ 的代数方程可表示为

$$\sum_i \{\delta_{ij} - \overline{m}_i B_i(\lambda)\lambda^4 G(x_j;x_i,\lambda)\} Y(x_i) = 0,$$
$$j = 1,\cdots,n \tag{6.9.8}$$

注意，格林函数物理上可解释为上述梁在 $x = x_i$ 处作用有单位集中力时，满足指定边界条件下的弯曲响应曲线。这样，由叠加原理，在方程(6.9.6)右端所示多个集中力作用下，上述梁的弯曲响应曲线就是

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i B_i(\lambda)\lambda^4 Y(x_i) G(x;x_i,\lambda)$$

上式中令 $x = x_j$，它理应等于 $Y(x_j)$。这样就得到了式(6.9.8)。

现在来看格林函数的求法。对式(6.9.7)进行拉普拉斯变换，可得

$$\mathscr{L}(G) = \frac{s^3G(0) + s^2G'(0) + sG''(0) + G'''(0)}{s^4 - \lambda^4} + \frac{e^{-sx_i}}{s^4 - \lambda^4} \tag{6.9.9}$$

式中 $G(0)$、$G'(0)$、$G''(0)$、$G'''(0)$、为待定常数。

注意到

$$\frac{1}{s^4 - \lambda^4} = \frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{1}{s^2 - \lambda^2} - \frac{1}{s^2 + \lambda^2}\right)$$

再对式(6.9.9)进行拉普拉斯逆变换，经整理后可得

$$G(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x + C\mathrm{sh}\lambda x + D\mathrm{ch}\lambda x + (1/2\lambda^3)\{\mathrm{sh}\lambda(x - x_i) - \sin\lambda(x - x_i)\}u(x - x_i) \tag{6.9.10}$$

式中 $A$、$B$、$C$、$D$ 为新的待定常数，它们可由梁的边界条件确定。

当上述梁在 $x=0$ 与 $x=l$ 处均为铰支时，边界条件为

$$G(0)=G''(0)=G(l)=G''(l)=0 \tag{6.9.11}$$

将它们代入式(6.9.10)，可得

$$B=D=0$$

$$A=(1/2\lambda^3)\{\sin\lambda(l-x_i)/\sin\lambda l\}$$

$$C=-(1/2\lambda^3)\{\mathrm{sh}\lambda(l-x_i)/\mathrm{sh}\lambda l\}$$

由此得

$$G(x;x_i,\lambda)=\frac{1}{2\lambda^3\mathrm{sh}\lambda l\sin\lambda l}\begin{cases}W(x;x_i,\lambda),x\leqslant x_i\\W(x_i;x,\lambda),x>x_i\end{cases} \tag{6.9.12}$$

其中

$$W(x;x_i,\lambda)=\sin\lambda(l-x_i)\sin\lambda x\mathrm{sh}\lambda l\\-\mathrm{sh}\lambda(l-x_i)\mathrm{sh}\lambda x\sin\lambda l \tag{6.9.12a}$$

将这一结果代入式(6.9.8)，可写成

$$\begin{bmatrix}A_{11}-1 & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\A_{21} & A_{22}-1 & \cdots & A_{2n}\\\vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y(x_1)\\Y(x_2)\\\vdots\\Y(x_n)\end{bmatrix}=0 \tag{6.9.8a}$$

其中

$$A_{ji}=\overline{m}_iB_i(\lambda)\lambda^4G(x_j;x_i,\lambda),\quad i,j=1,\cdots,n$$

令上述方程中系数矩阵的行列式等于零，可得该杂交系统的特征方程，它一般为超越方程。由此可求出系统的一系列特征值 $\lambda_r, r=1,2,\cdots$。而对应于每个 $\lambda_r$，可由方程(6.9.8a)确定相应的特征矢量

$$[Y_r(x_1)\ Y_r(x_2)\ \cdots\ Y_r(x_n)]^{\mathrm{T}},\ r=1,2,\cdots$$

这时，上述梁的固有振型函数可表示为

$$Y_r(x)=\sum_{i=1}^{n}\overline{m}_iB_i(\lambda_r)\lambda_r^4G(x,x_i,\lambda_r)Y_r(x_i) \tag{6.9.13}$$

现考察上述振型函数的正交关系。由式(6.9.11)，振型函数的边界条件为

$$Y_r(0)=Y''_r(0)=Y_r(l)=Y''_r(l)=0,\quad r=1,2,\cdots$$

由上式以及分部积分公式，不难推出

$$\int_0^l Y''''_r(x)Y_s(x)\mathrm{d}x=\int_0^l Y_r(x)Y''''_s(x)\mathrm{d}x$$

由式(6.9.6)有

$$Y''''_r(x)-\lambda_r^4Y_r(x)=\lambda_r^4\sum_i\overline{m}_iB_i(\lambda_r)Y_r(x_i)\delta(x-x_i)\tag{6.9.14}$$

$$Y''''_s(x)-\lambda_s^4Y_s(x)=\lambda_s^4\sum_i\overline{m}_iB_i(\lambda_s)Y_s(x_i)\delta(x-x_i)\tag{6.9.15}$$

对式(6.9.14)乘以 $Y_s(x)$，再沿梁长进行积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^l &Y_s(x)Y''''_r(x)\mathrm{d}x-\lambda_r^4\int_0^l Y_s(x)Y_r(x)\mathrm{d}x\\&=\lambda_r^4\int_0^1\sum_i\overline{m}_iB_i(\lambda_r)Y_s(x)Y_r(x_i)\delta(x-x_i)\mathrm{d}x\\&=\lambda_r^4\sum_i\overline{m}_iB_i(\lambda_r)Y_s(x_i)Y_r(x_i)\end{aligned}$$

对式(6.9.15)乘以 $Y_r(x)$，再沿梁长进行积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^l &Y_r(x)Y''''_s(x)\mathrm{d}x-\lambda_s^4\int_0^l Y_r(x)Y_s(x)\mathrm{d}x\\&=\lambda_s^4\int_0^l\sum_i\overline{m}_iB_i(\lambda_s)Y_r(x_i)Y_s(x_i)\end{aligned}$$

两式相减，得

$$\begin{aligned}(\lambda_r^4-\lambda_s^4)&\int_0^l Y_r(x)Y_s(x)\mathrm{d}x\\&+\sum_i\overline{m}_iY_r(x_i)Y_s(x_i)\{\lambda_r^4B_i(\lambda_r)-\lambda_s^4B_i(\lambda_s)\}=0\end{aligned}$$

上式在括号内的量可化为

$$\lambda_r^4B_i(\lambda_r)-\lambda_s^4B_i(\lambda_s)=(\lambda_r^4-\lambda_s^4)B_i(\lambda_r)B_i(\lambda_s)$$

于是有

$$(\lambda_r^4-\lambda_s^4)\{\int_0^l Y_r(x)Y_s(x)\mathrm{d}x$$
$$+\sum_i \overline{m}_i B_i(\lambda_r)B_i(\lambda_s)Y_r(x_i)Y_s(x_i)\}=0$$

当杂交系统不存在重特征值时，有 $\lambda_r\neq\lambda_s$，当 $r\neq s$。由此可得

$$\int_0^l Y_r(x)Y_s(x)\mathrm{d}x+\sum_i \overline{m}_i B_i(\lambda_r)B_i(\lambda_s)Y_r(x_i)Y_s(x_i)=0,\quad r\neq s$$

上式也可以写成

$$\int_0^l \{1+\sum_i \overline{m}_i B_i(\lambda_r)B_i(\lambda_s)\delta(x-x_i)\}Y_r(x)Y_s(x)\mathrm{d}x=b_r\delta_{rs}$$
$$r,s=1,2,\cdots \tag{6.9.16}$$

其中 $b_r$ 为规范化常数。式(6.9.16)就是上述杂交系统振型函数的正交关系式。

求解杂交系统的强迫振动响应问题也可以有效地采用模态分析法。利用上述振型函数的正交关系，可以将杂交系统的强迫振动响应问题化为已解耦的各个模态响应问题。

这时，可假设

$$y(x,t)=\sum_r a_r(t)Y_r(x) \tag{6.9.17}$$

$$y_i(t)=\sum_r a_r(t)B_i(\lambda_r)Y_r(x_i) \tag{6.9.18}$$

式中，$a_r(t)$ 为待定的模态响应，$Y_r(x)$ 为杂交系统的第 $r$ 阶振型函数，它们满足式(6.9.6)以及正交条件式(6.9.16)。将上述式(6.9.17)与式(6.9.18)代入方程(6.9.1)、(6.9.2)与(6.9.3)，并利用式(6.9.6)与式(6.9.16)，经过整理，最终可得

$$\ddot{a}_r(t)+\alpha_r^4 a_r(t)=q_r(t),\quad r=1,2,\cdots \tag{6.9.19}$$

式中

$$q_r(t)=(\rho b_r)^{-1}\int_0^l Y_r(x)\{p(x,t)+\sum_i B_i(\lambda_r)f_i(t)\delta(x-x_i)\}\mathrm{d}x$$
$$r=1,2,\cdots \tag{6.9.20}$$

以上仅就简支梁情形进行了讨论。作为练习，读者可自行推导悬臂梁情形的相应结果。悬臂梁的格林函数可求得为

$$G(x;x_i,\lambda)=-\frac{1}{4\lambda^3(1+\cos\lambda l\operatorname{ch}\lambda l)}\begin{cases}W(x;x_i,\lambda),x\leqslant x_i\\W(x_i;x,\lambda),x\geqslant x_i\end{cases}\tag{6.9.21}$$

式中

$$\begin{aligned}W(x;x_i,\lambda)=&\{\varphi_2(\lambda l-\lambda x_i)\varphi_1(\lambda l)\\&-\varphi_1(\lambda l-\lambda x_i)\varphi_2(\lambda l)\}\varphi_3(\lambda x)\\&+\{\varphi_1(\lambda l-\lambda x_i)\varphi_1(\lambda l)\\&-\varphi_2(\lambda l-\lambda x_i)\varphi_4(\lambda l)\}\varphi_4(\lambda x)\end{aligned}\tag{6.9.22}$$

并有

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(x)&=\operatorname{ch}x+\cos x\\\varphi_2(x)&=\operatorname{sh}x+\sin x\\\varphi_3(x)&=\operatorname{ch}x-\cos x\\\varphi_4(x)&=\operatorname{sh}x-\sin x\end{aligned}\right\}\tag{6.9.23}$$

**例 6.9.1** 考察图6.9.2所示杂交系统，它由一均匀简支梁在其中点处连接一刚度为 $k$、质量为 $m$ 的线性谐振子组成。试求系统的特征方程与相应的固有振型函数的表示式。

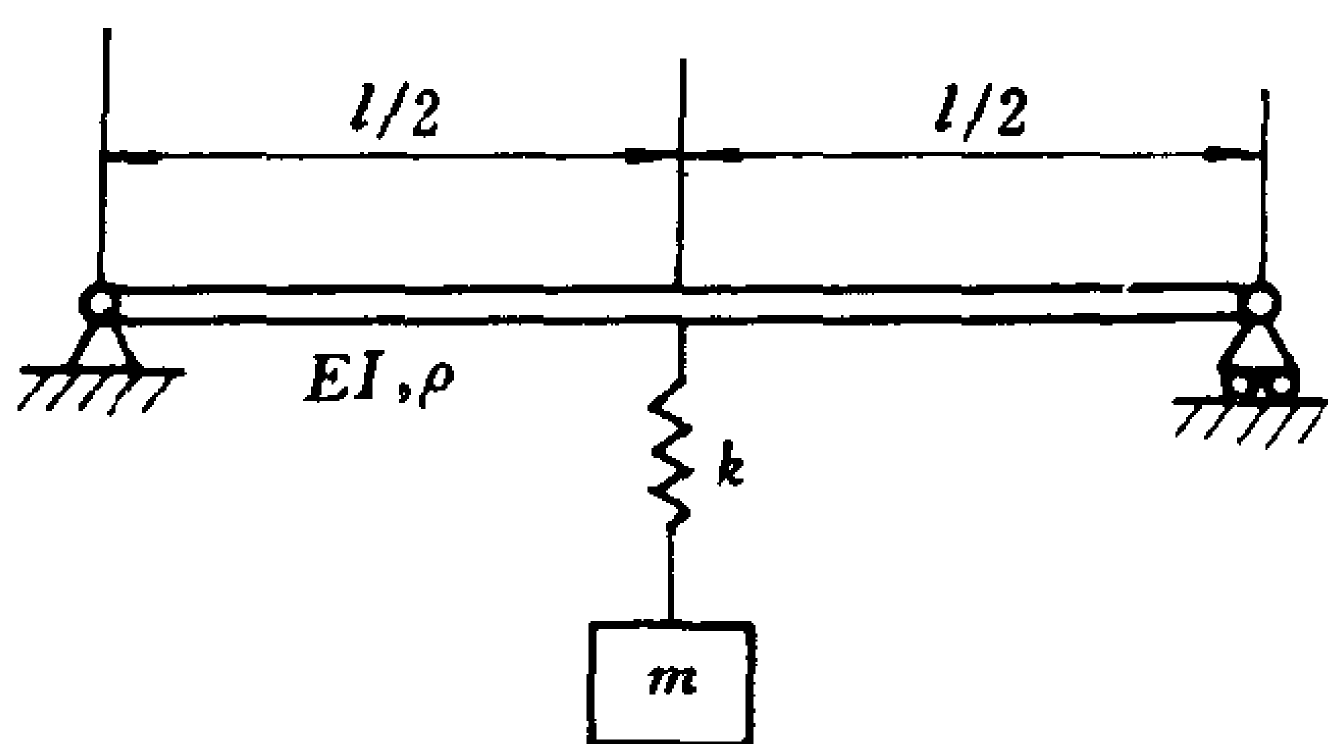



图 6.9.2　杂交系统例

**解**　这时，仅在梁 $x_1=l/2$ 处连接一离散振子，故可取

$$Y(x_1)=1$$

由式(6.9.10)，梁的格林函数为

$$G(x;x_1,\lambda)=\frac{1}{2\lambda^3\operatorname{sh}\lambda l\sin\lambda l}$$

$$\{\sin(\lambda l/2)\mathrm{sh}\lambda l\sin\lambda x - \mathrm{sh}(\lambda l/2)\sin\lambda l\,\mathrm{sh}\lambda x\}, \quad x \leqslant x_1$$

故有

$$G(x_1;x_1,\lambda) = \frac{1}{2\lambda^3}\left\{\frac{\sin^2(\lambda l/2)}{\sin\lambda l} - \frac{\mathrm{sh}^2(\lambda l/2)}{\mathrm{sh}\lambda l}\right\}$$
$$= \frac{1}{4\lambda^3}\{\tan(\lambda l/2) - \mathrm{th}(\lambda l/2)\}$$

由此得

$$A_{11} = \overline{m}_1 B_1(\lambda)\lambda^4 G(x_1;x_1,\lambda)$$
$$= \frac{k_1 m_1 \alpha^4}{4EI\lambda^3(k_1 - m_1\alpha^4)}\{\tan(\lambda l/2) - \mathrm{th}(\lambda l/2)\}$$

其中

$$\alpha^4 = \lambda^4 EI/\rho$$

于是，由式(6.9.8$a$)，系统的特征方程为

$$A_{11} - 1 = 0$$

即有

$$\frac{k_1 m_1 \lambda}{4(\rho k_1 - m_1 EI\lambda^4)}\{\tan(\lambda l/2) - \mathrm{th}(\lambda l/2)\} = 1$$

由此可解出系统的特征值 $\lambda_r, r = 1,2,\cdots$。而对应于 $\lambda_r$ 的固有振型函数，由式(6.9.13)，可得为

$$Y_r(x) = \overline{m}_1 B_1(\lambda)\lambda^4 G(x;x_1,\lambda)$$
$$= \frac{k_1 m_1 \lambda_r}{4(\rho k_1 - m_1 EI\lambda_r^4)}\left\{\frac{\sin\lambda x}{\cos(\lambda l/2)} - \frac{\mathrm{sh}\lambda x}{\mathrm{ch}(\lambda l/2)}\right\},$$
$$x < l/2$$

且有

$$Y_r(x) = Y_r(l - x), \quad x > l/2$$

# 第七章　连续系统的离散化与近似解法

## 7.1　引　　言

前面讨论了理想弹性体振动的最简单的几种情形，并得到了各种问题的精确解。但对稍微复杂的系统，如变截面直梁或曲梁，要得到它们的准确解就不那么容易了；至于复杂弹性结构的振动问题，求精确解有时甚至是不可能的。因此，在这种情况下，将连续系统离散化，即把具有无限多个自由度的连续模型离散为只有有限个自由度的系统，并由此求出连续系统近似解的方法就成为工程中的一种切实可行的重要途径。应该指出，上一章通过简单弹性体反映出的连续系统的本质、规律和结论，对于建立连续系统的离散模型，寻求其振动问题的近似解，都有着重要的指导意义。

最简单的离散化方法有两种，即集中质量法和假设模态法。在此基础上又产生、发展了一些更为有效的方法，如模态综合法、有限元素法。本章将分别介绍这些方法。

## 7.2　集中质量法

集中质量模型早先是从那些物理参数分布很不均匀或相对集中的实际系统中抽象出来的。人们把那些惯性相对大而弹性极微弱的部件看做集中质量，而把那些惯性相对小而弹性极为显著的部件看做无质量的弹簧，从而得到集中质量模型。后来这一方法推

广应用于均匀或近乎均匀的弹性体上，这时把结构划分为若干个单元，把每一单元的分布质量按静力学平行力分解原理，将单元的分布质量集中于单元的两个端点。这样，便把一个具有无限自由度的结构离散为一具有若干个集中质量的有限自由度系统。集中质量间的连接刚度仍与原结构的相应刚度相同。我们用图 7.2.1(*a*) 所示变截面梁的离散化来说明这一方法。

首先将变截面梁用若干个均匀梁段所组成的阶梯梁来代替图 7.2.1(*b*)，然后保持各梁段的弹性特征，将它的质量分别集中到梁段的两端，得到图 7.2.1(*c*) 所示的多自由度系统模型。

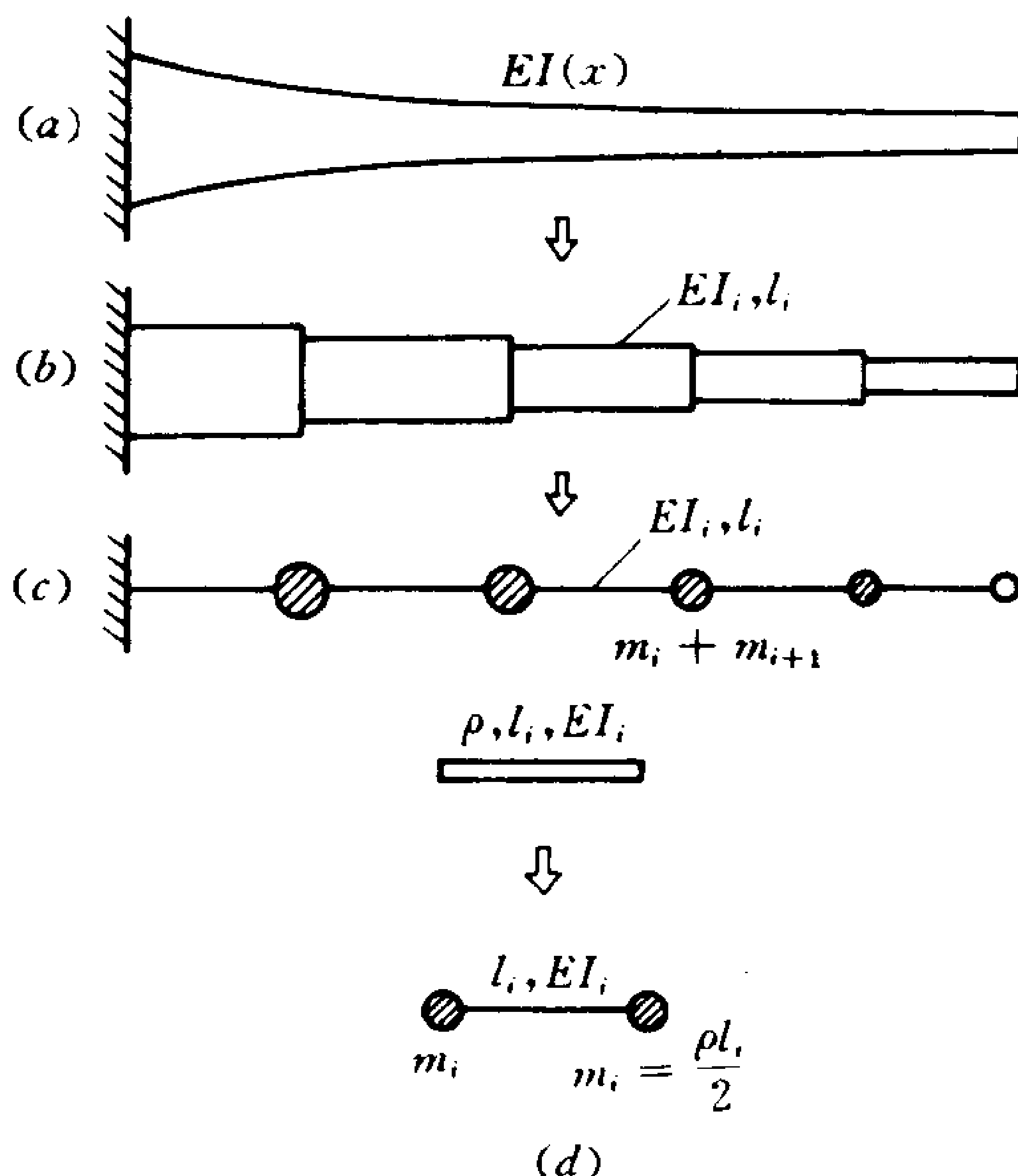



图 7.2.1　集中质量离散化

对于均匀梁的离散过程就只是简单地分段与集中，至于分段

多少合宜，得视具体问题而言。以均匀简支梁为例，图 7.2.2($a$) 将其分为两段，得到图 7.2.2($b$) 所示模型，可以相当准确地求出一阶固有频率为

$$p_1 = 9.788\alpha, \quad \alpha = \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}}$$

若将此梁分成 4 段（见图 7.2.2($c$)），又可求得前 3 阶固有频率的近似值为

$$p_1 \doteq 9.86\alpha, \quad p_2 \doteq 39.20\alpha, \quad p_3 \doteq 83.24\alpha$$

简支梁前 3 阶固有频率的准确值为

$$p_1 = 9.877\alpha, \quad p_2 = 39.48\alpha, \quad p_3 = 88.83\alpha$$

可见，对于简支梁采用集中质量模型，所得结果是令人满意的。如果要求更高阶的频率或提高计算精度，就得划分更多的梁段。

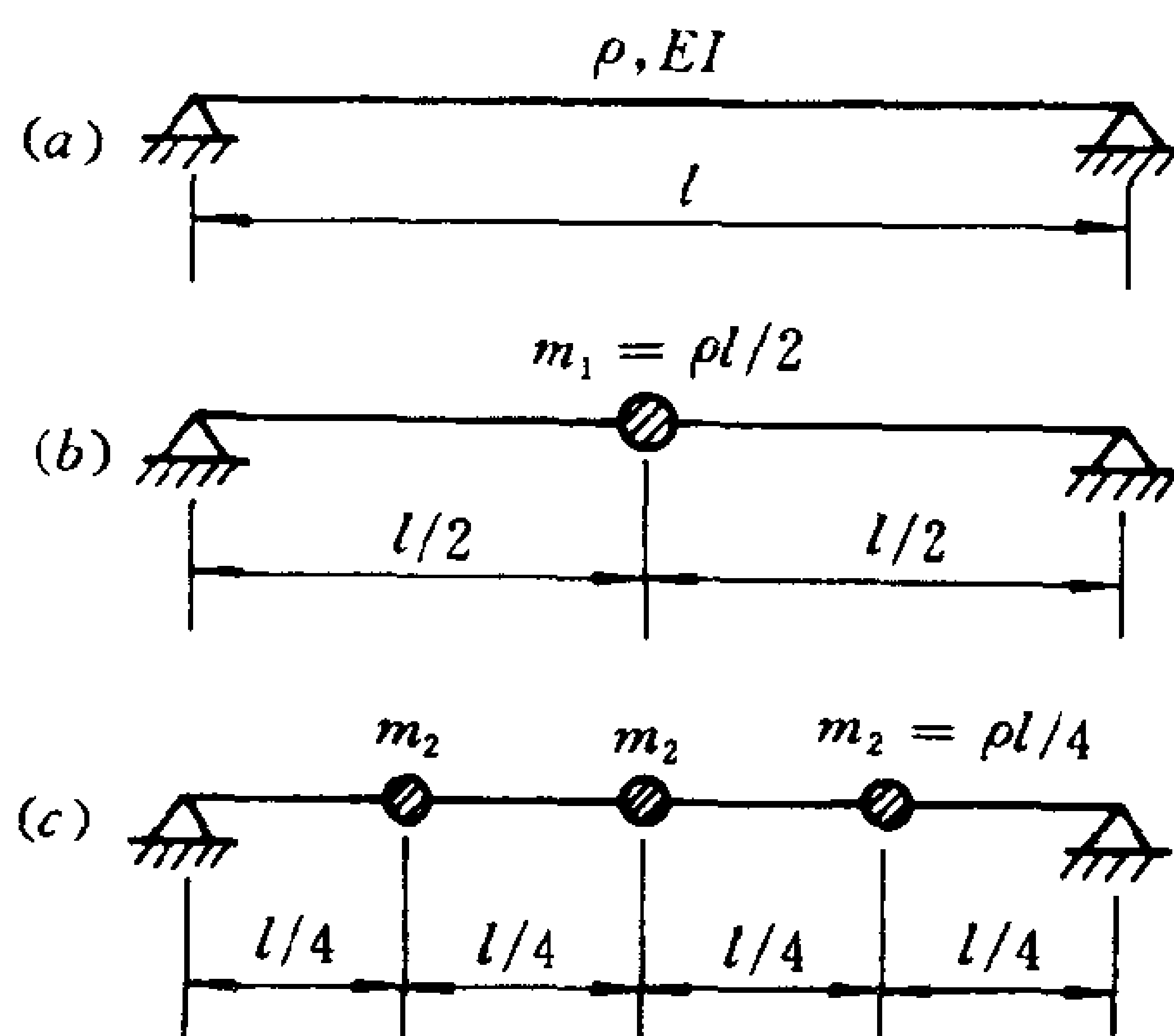



图 7.2.2　简支梁离散化

再以悬臂梁为例，图 7.2.3($a$) 将其分为两段，可求出前 2 阶固有频率的近似值为

$$p_1 \doteq 3.156\alpha, \quad p_2 \doteq 16.27\alpha$$

而相应的准确值为

$p_1 = 3.515\alpha, p_2 = 22.04\alpha$

由此可见，对悬臂梁用集中质量模型所得的结果就不是十分理想。格莱德威尔曾详细研究了用集中质量法求解均匀梁弯曲振动问题，他证明了对固支、铰支、滑动支座的情形。用集中质量法所得固有频率的误差与 $1/N^4$ 成正比，而对具有自由端的梁，相应的误差则与 $1/N^2$ 成正比，其中 $N$ 是分段数。

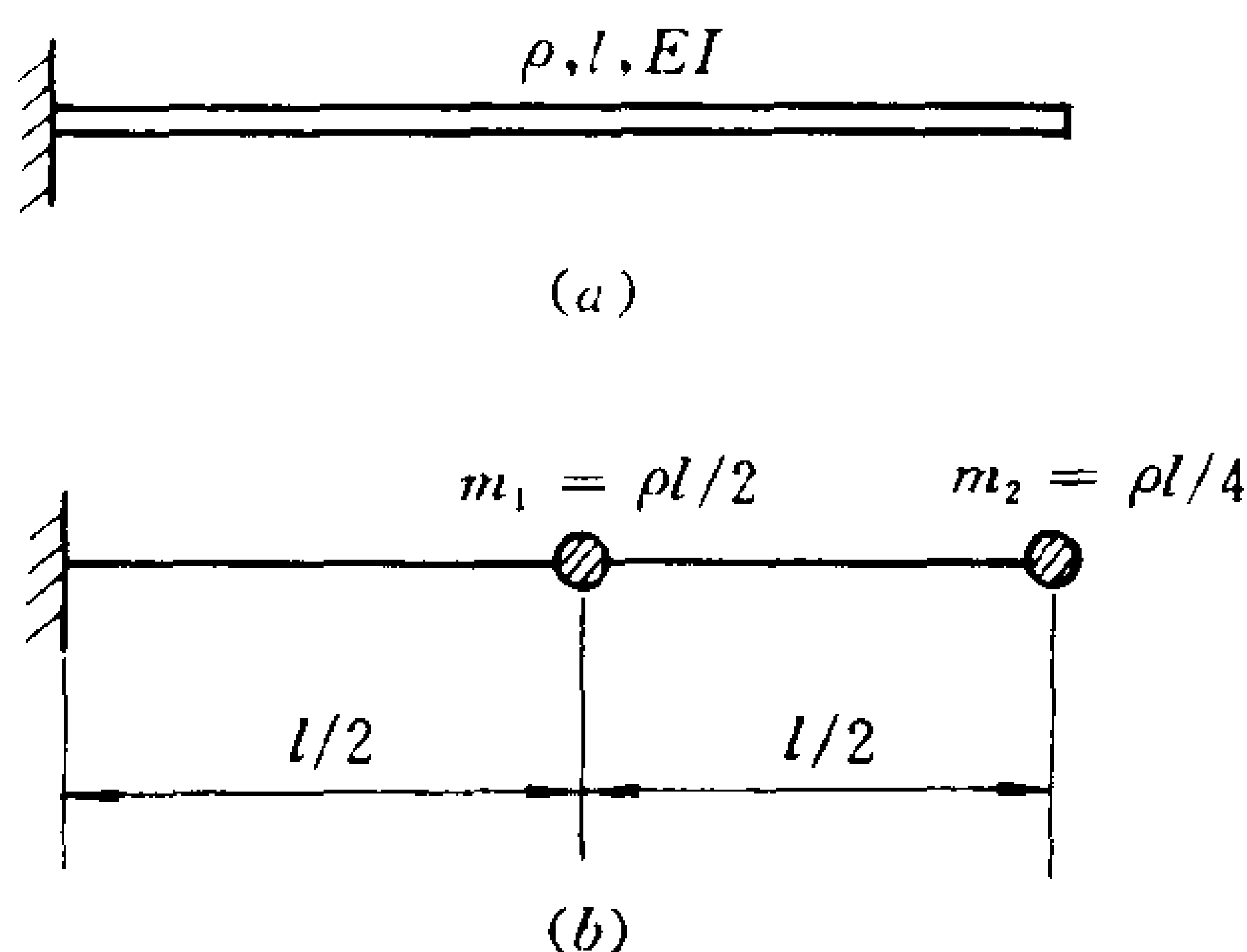



图 7.2.3 悬臂梁离散化

## 7.3 假设模态法

假设模态法也是一种对连续系统进行离散化的方法。与第五章介绍的里兹法类似。首先对结构作出有限个假设模态 $\varphi_i(x)$，而连续系统对应于各个假设模态的运动可表示为 $\varphi_i(x)q_i(t)$，其中 $q_i(t)$ 为待定的广义坐标。这时，连续系统的运动可表示为这些假设模态运动的线性组合。下面具体说明其做法。

在梁的弯曲振动问题中，将梁的挠度表示为

$$y(x_1,t) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)q_i(t) \tag{7.3.1}$$

式中 $\varphi_i$ 为假设模态，它们一般是给定边值问题的容许函数（即满足位移边界条件的函数）或比较函数（即同时满足位移边界条件和力边界条件的函数），$q_i$ 为相应的广义坐标。下面用拉氏方程推导广义坐标 $q_i$ 所满足的微分方程。

将式(7.3.1)改写为

$$y(x,t)=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q} \tag{7.3.2}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=[\varphi_1(x)\ \varphi_2(x)\ \cdots\ \varphi_n(x)]$$

$$\boldsymbol{q}(t)=[q_1\ q_2\ \cdots\ q_n]^{\mathrm{T}}$$

设梁上没有附加质量和弹性支承，则梁在弯曲振动中的动能、势能分别为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}\int_0^l\rho(x)[\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^l\rho(x)\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{7.3.3}$$

$$E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\int_0^l EI[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^l EI\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Phi}'')(\boldsymbol{\Phi}'')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q} \tag{7.3.4}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=\int_0^l\rho(x)\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x=[m_{ij}]\\ \boldsymbol{K}&=\int_0^l EI\boldsymbol{\Phi}''(\boldsymbol{\Phi}'')^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x=[k_{ij}]\end{aligned}\right\} \tag{7.3.5}$$

其中

$$m_{ij}=m_{ji}=\int_0^l\rho(x)\varphi_i\varphi_j\mathrm{d}x$$

$$k_{ij}=k_{ji}=\int_0^l EI\varphi_i''\varphi_j''\mathrm{d}x$$

在杆的纵振与扭振问题中，动能与势能的表示式仍取式(7.3.3)和(7.3.4)的形式，只是其中 $k_{ij}$ 分别为

纵振：
$$k_{ij}=\int_0^l EA(x)\varphi_i'\varphi_j'\mathrm{d}x \tag{7.3.6}$$

扭振：
$$k_{ij}=\int_0^l GI_p\varphi_i'\varphi_j'\mathrm{d}x \tag{7.3.7}$$

假设梁上作用的外激扰有分布力 $p(x,t)$ 和集中力 $F_r(t)(r=1,2,\cdots,s)$，则激扰力的分布集度可表示为

$$p(x,t)+\sum_{r=1}^{s}F_r(t)\delta(x-x_r)$$

其中,$\delta(x-x_r)$ 是 $\delta$ 函数,满足

$$\delta(x-x_r)=0,\quad x\neq x_r$$

$$\int_0^l \delta(x-x_r)\mathrm{d}x=1,\quad 0<x_r<l$$

当梁上有虚位移 $\delta y(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\delta q_i$ 时,激扰力在系统虚位移上所做的虚功为

$$\begin{aligned}\delta W(t)&=\int_0^l\{p(x,t)+\sum_{r=1}^{s}F_r(t)\delta(x-x_r)\}\delta y(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^l\{p(x,t)+\sum_{r=1}^{s}F_r(t)\delta(x-x_r)\}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\delta q_i\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{n}[\int_0^l p(x,t)\varphi_i(x)\mathrm{d}x+\sum_{r=1}^{s}F_r(t)\varphi_i(x_r)]\delta q_i\end{aligned}$$

按广义力的定义有

$$\delta W(t)=\sum_{i=1}^{n}Q_i(t)\delta q_i$$

所以,对应于 $q_i$ 的广义力为

$$Q_i(t)=\int_0^l p(x,t)\varphi_i(x)\mathrm{d}x+\sum_{r=1}^{s}F_r(t)\varphi_i(x_r)\qquad(7.3.8)$$

将式(7.3.3)、(7.3.4)和(7.3.8)代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i})-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n$$

中得

$$\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\ddot{q}_j(t)+\sum_{j=1}^{n}k_{ij}q_j(t)=Q_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n$$

写成矩阵形式有

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{Q}(t)\qquad(7.3.9)$$

这样就将弹性体的振动转换成多自由度系统的振动问题。与式

(7.3.9) 对应的自由振动微分方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = 0 \tag{7.3.10}$$

设方程(7.3.10) 的解为

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a}\sin(pt + \varphi) \tag{7.3.11}$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 为待定常数列阵，将式(7.3.11) 代入式(7.3.10) 中，得

$$[\boldsymbol{K} - \boldsymbol{M}\lambda]\boldsymbol{a} = 0, \quad \lambda = p^2 \tag{7.3.12}$$

由此得到 $n$ 个特征值 $\lambda_i$ 和相应的待征矢量 $\boldsymbol{a}_i$。$p_i = \sqrt{\lambda_i}$ 就是原连续系统的 $n$ 个固有频率的近似值。

因为

$$y(x,t) = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\sin(pt + \varphi)$$

故相应于第 $i$ 阶固有频率的振型函数 $x_i(t)$ 为

$$x_i(t) = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi} \tag{7.3.13}$$

可以证明，这样得到的振型函数 $x_i(t)$ 具有关于连续系统分布质量和分布刚度的正交性。事实上，因为特征矢量 $\boldsymbol{a}_i$ 具有关于 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$ 的正交性，即

$$\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}_i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ M_i, & i = j \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}_i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i, & i = j \end{cases}$$

再考虑到式(7.3.5)，则有

$$\begin{aligned} \int_0^l \rho(x)x_i(x)x_j(x)\mathrm{d}x &= \int_0^l \rho\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j\mathrm{d}x \\ &= \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\int_0^l \rho(x)\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\boldsymbol{a}_j \\ &= \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ m_i, & i = j \end{cases} \end{aligned}$$

可以类似地证明 $x_i(t)$ 关于分布刚度的正交性。

顺便指出，若梁上有附加质量或有弹性支承，则只要在计算梁

的动能和势能时计入附加质量的动能和弹性支承的势能，依此写出系统相应的矩阵 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$ 即可。

**例 7.3.1**　图示一悬臂梁，长为 $l$，质量和刚度的分布规律可表示为

$$\rho(x) = A_0 l(1 + \frac{x}{l}),$$

$$EI(x) = EI_0(1 + \frac{x}{l})^3$$

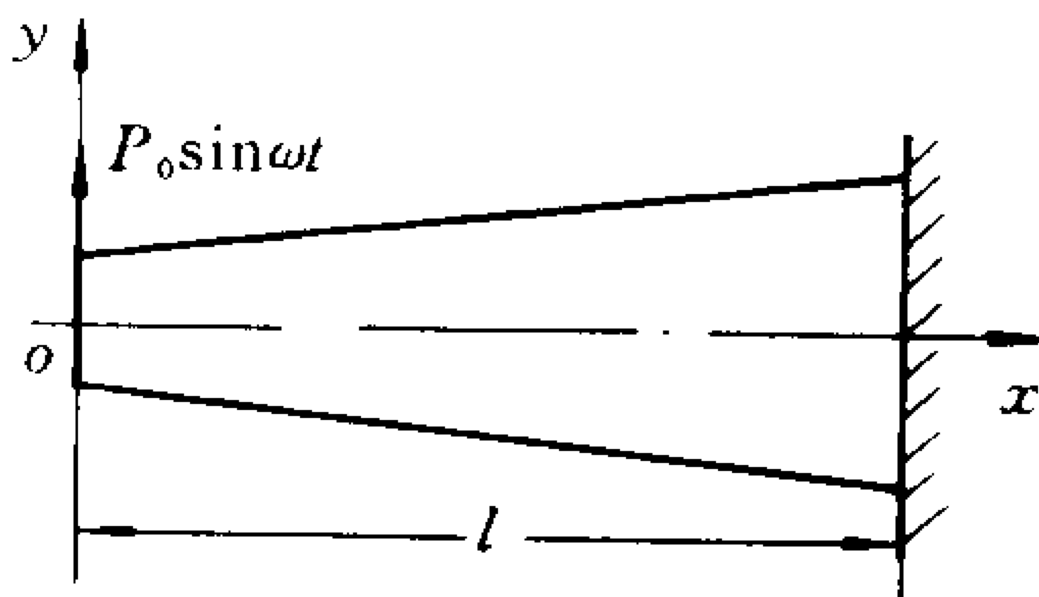



图 7.3.1　楔形梁

试求：(1) 系统的前 2 阶频率和振型函数。

(2) 若在梁的自由端作用有集中力 $P_0\sin\omega t$，求梁的横向稳态振动。

**解**　(1) 选取系统的假设模态为

$$\varphi_i(x) = (1 - \frac{x}{l})^2(\frac{x}{l})^{i-1}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

不难验证，它们既满足位移边界条件，也满足力边界条件，故它们在本问题中是比较函数，如果对前 2 阶频率和振型的计算精度要求不高，可以取 $n = 2$，这时

$$\varphi_1 = (1 - \frac{x}{l})^2, \qquad \varphi_1'' = \frac{2}{l^2}$$

$$\varphi_2 = (1 - \frac{x}{l})^2 \frac{x}{l}, \quad \varphi_2'' = \frac{2}{l^2}(\frac{3x}{l} - 2)$$

代入式(7.3.5)，算出

$$\boldsymbol{M} = \rho A_0 l\begin{bmatrix} \frac{7}{30} & \frac{3}{70} \\ \frac{3}{70} & \frac{11}{840} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 15 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & 9 \end{bmatrix}$$

由特征值问题

$$[\boldsymbol{K} - \boldsymbol{M}p^2]\boldsymbol{a} = 0 \tag{a}$$

可求得

$$p_1 = \frac{7.692}{l^2}\sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0}}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.381 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \frac{43.211}{l^2}\sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0}}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5.257 \end{bmatrix}$$

将所得结果代入式(7.3.13)，得相应的近似振型函数

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_1(x) &= \boldsymbol{\varphi}_1 + 0.381\boldsymbol{\varphi}_2 \\ \boldsymbol{X}_2(x) &= \boldsymbol{\varphi}_1 - 5.25\boldsymbol{\varphi}_2 \end{aligned} \tag{b}$$

(2) 将梁的稳态振动表示为

$$y(x,t) = \varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2 \tag{c}$$

作用在 $x = 0$ 的外激扰力可表示为

$$p(x,t) = P_0 \sin\omega t \delta(x)$$

由式(7.3.8) 又得对应广义坐标 $q_1$ 和 $q_2$ 的广义力为

$$Q_1 = P_0 \sin\omega t \varphi_1(0) = P_0 \sin\omega t$$

$$Q_2 = P_0 \sin\omega t \varphi_2(0) = 0$$

于是有

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} P_0 \sin\omega t \tag{d}$$

前面已求出特征值矩阵和特征向量矩阵分别为

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{EI_0}{\rho A_0 l^4}\begin{bmatrix} 7.692^2 & \\ & 43.211^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.318 & -5.257 \end{bmatrix}$$

对方程($d$) 作主坐标变换

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} \tag{e}$$

可得

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z} &= \overline{\boldsymbol{M}}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} P_0 \sin\omega t \\ &= \frac{P_0}{\rho A_0 l}\begin{bmatrix} 3.818 \\ 6.914 \end{bmatrix}\sin\omega t \end{aligned} \tag{f}$$

式中

$$\overline{M} = A^{\mathrm{T}}MA = \rho A_0 l\begin{bmatrix} 0.2619 & 0 \\ 0 & 0.1446 \end{bmatrix}$$

由式($f$)求出 $z_1$、$z_2$ 为

$$z_1 = \frac{3.818 p_0}{\rho A_0 l(p_1^2 - w^2)}\sin\omega t$$

$$z_2 = \frac{6.914 p_0}{\rho A_0 l(p_2^2 - w_2)}\sin\omega t$$

代回式($e$)得到 $q_1$、$q_2$，然后代入式($c$)求出 $y(x,t)$。

**例 7.3.2** 图示简支梁中点处有一集中质量 $m = \rho Al$ 试求梁的前 3 阶频率和振型。

**解** 均匀简支梁无集中质量时的振型函数是

$$x_i(x) = \sin\frac{i\pi}{l}x, \quad i = 1,2,\cdots$$

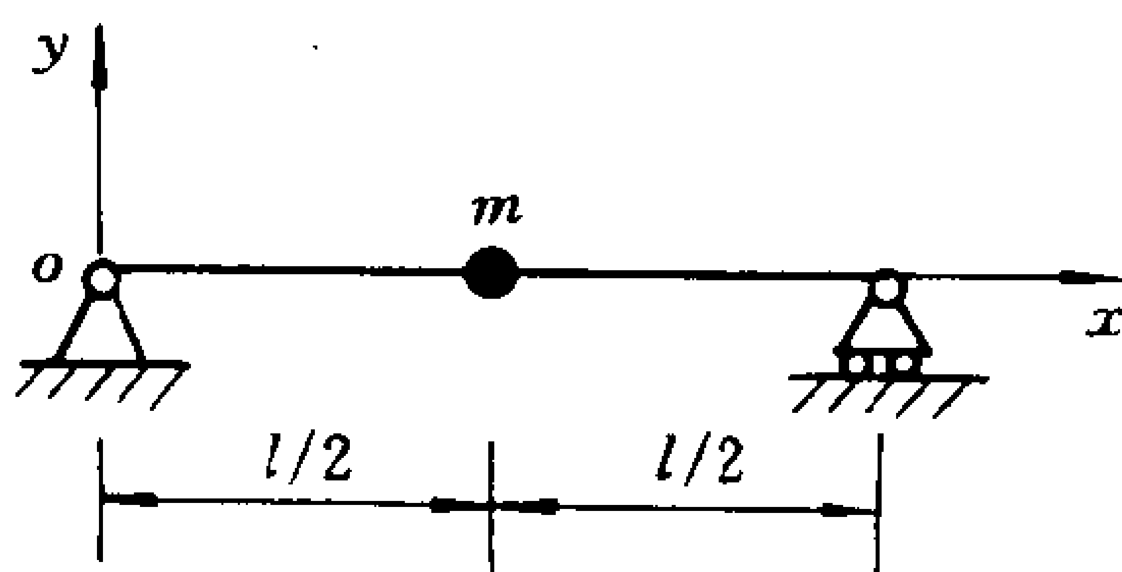



图 7.3.2 带集中质量的简支梁

在这里，我们取前 $n$ 项为假设模态，可以验证它们满足全部边界条件，故为比较函数。在计算精度要求不高时，可取 $n = 3$，即

$$\varphi_1\sin = \frac{\pi}{l}x, \quad \varphi_2 = \sin\frac{2\pi}{l}x, \quad \varphi_3 = \sin\frac{3\pi}{l}x \qquad (a)$$

仿照前边的推导，知

$$k_{ij} = \int_0^l EI\varphi_i''\varphi_j''\mathrm{d}x$$

$$m_{ij} = \int_0^l \rho A\varphi_i\varphi_j\mathrm{d}x + \rho Al\varphi_i(\frac{l}{2})\varphi_j(\frac{l}{2}) \qquad (b)$$

将式($a$)代入式($b$)知

$$\boldsymbol{K}=\frac{\pi^4 EI}{2l^3}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 16 & \\ & & 81\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}=\frac{\rho Al}{2}\begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

由

$$[\boldsymbol{K}-\boldsymbol{M}p^2]\boldsymbol{a}=0$$

得

$$p_1=5.682\,543\sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}},\quad \boldsymbol{a}_1=\sqrt{\frac{2}{\rho Al}}\begin{bmatrix}0.574\,167\\ 0.0\\ -0.004\,758\end{bmatrix}$$

$$p_2=39.478\,4\sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}},\quad \boldsymbol{a}_2=\sqrt{\frac{2}{\rho Al}}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$p_3=68.994\,4\sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}},\quad \boldsymbol{a}_3=\sqrt{\frac{2}{\rho Al}}\begin{bmatrix}0.519\,9\\ 0.0\\ 0.774\,6\end{bmatrix}$$

因此

$$X_1(x)=\sqrt{\frac{2}{\rho Al}}\left(0.574\,2\sin\frac{\pi x}{l}-0.004\,758\sin\frac{2\pi}{l}x\right)$$

$$X_2(x)=\sqrt{\frac{2}{\rho Al}}\left(\sin\frac{2\pi}{l}x\right)$$

$$X_3(x)=\sqrt{\frac{2}{\rho Al}}\left(0.519\,9\sin\frac{\pi x}{l}+0.774\,58\sin\frac{3\pi x}{l}\right)$$

## 7.4　模态综合法

原则上，假设模态法也适用于复杂结构的振动分析。但实际上，难于找到整体结构的假设模态。为了克服这一困难，人们设法把一个复杂结构分解为若干个较简单的子结构。对于这些子结构，较易找到它们的真实模态或假设模态。然后根据在对接面上保持位移协调（或再加上内力协调）的条件，把这些子结构装配成总体结构。这样，就可以用各个子结构的真实或假设模态来综合总体结

构的近似振动模态。**模态综合法**的名称也就是这样得来的。

可以用均匀直角梁在它本身平面内的弯曲振动问题为例来说明这一方法的基本思想。设有两根完全相同的均匀细直梁，长为 $l$，截面刚度为 $EI$，单位长度的质量为 $\rho$，由它们构成一直角梁，其一端固支，另一端自由，如图 7.4.1($a$) 所示。现考察它的平面弯曲振动的前 2 阶固有频率与振型。

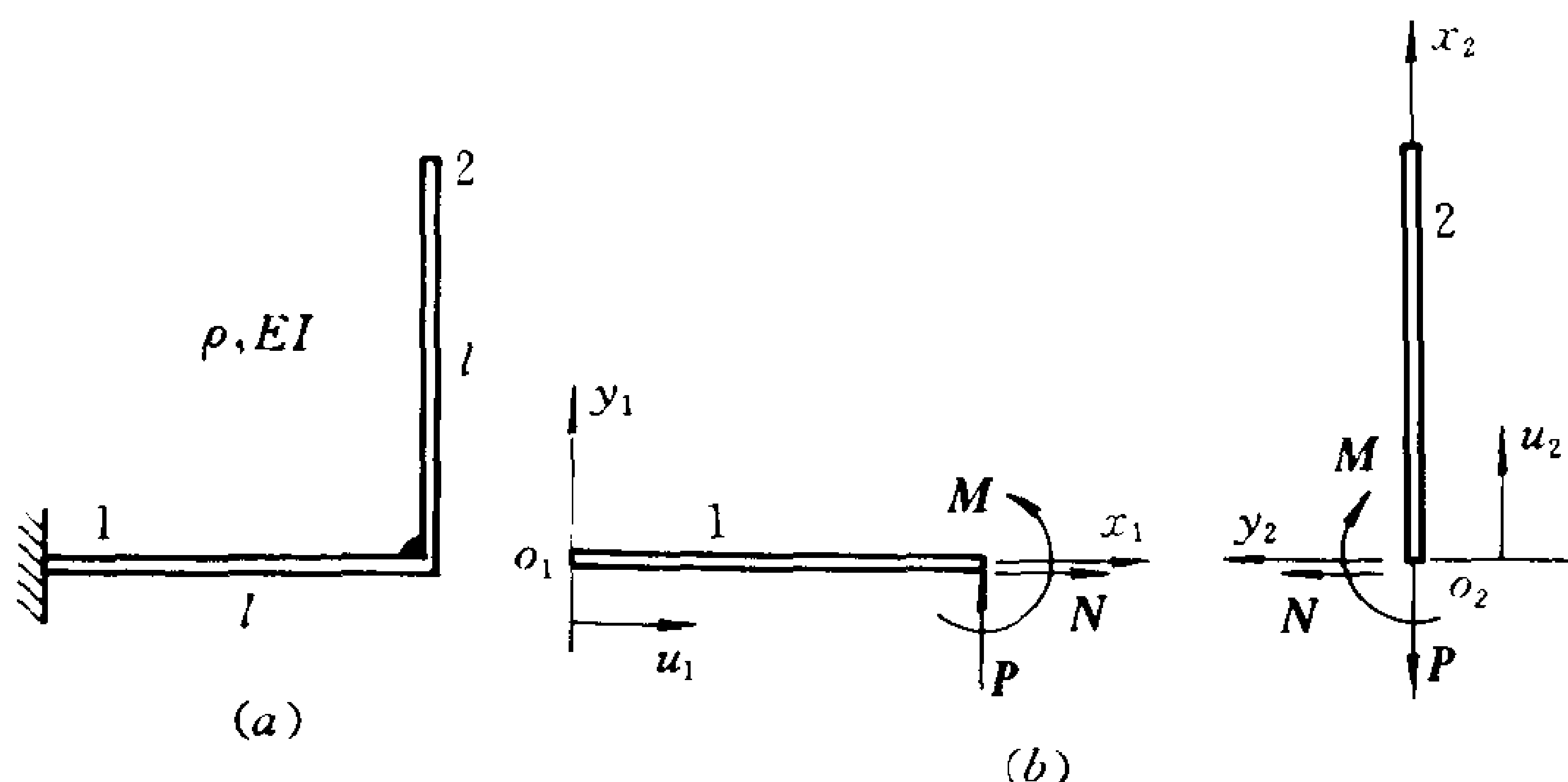



图 7.4.1　直角梁

将这一直角梁分成两段均匀的直梁 1 与 2，分别取坐标系 $x_1o_1y_1$ 与 $x_2o_2y_2$，如图 7.4.1($b$) 所示。各梁的振动位移用 $u_1(x_1,t)$、$y_1(x_1,t)$、$u_2(x_2,t)$ 与 $y_2(x_2,t)$ 表示。它们分别近似地假设为

$$\left.\begin{aligned} u_1(x_1,t) &= 0 \\ y_1(x_1,t) &= \varphi_1(x_1)z_1(t) + \varphi_2(x_1)z_2(t) \\ u_2(x_2,t) &= \varphi_3(x_2)z_3(t) \\ y_2(x_2,t) &= \varphi_4(x_2)z_4(t) + \varphi_5(x_2)z_5(t) \end{aligned}\right\} \tag{7.4.1}$$

其中各个假设模态 $\varphi_i(x)$ 可取为

$$\varphi_1(x_1) = (x_1/l)^2$$

$$\varphi_2(x_1) = (x_1/l)^3$$

$$\varphi_3(x_2) = 1$$

$$\varphi_4(x_2) = x_2/l$$

$$\varphi_5(x_2) = 6(x_2/l)^2 - 4(x_2/l)^3 + (x_2/l)^4$$

可以看到：$\varphi_1(x_1)$ 与 $\varphi_2(x_1)$ 是悬臂梁弯曲振动的容许函数；$\varphi_3(x_2)$ 是自由梁的纵向刚体运动模态；$\varphi_4(x_2)$ 是自由梁的刚体转动模态；而 $\varphi_5(x_2)$ 是悬臂梁弯曲振动的比较函数。这一比较函数可得出如下：先假设

$$\varphi_5(x_2) = c_1(x_2/l)^2 + c_2(x_2/l)^3 + (x_2/l)^4$$

其中 $c_1$、$c_2$ 是待定常数。然后使它满足梁自由端的力边界条件

$$\varphi_5''(l) = \varphi_5'''(l) = 0$$

由此得

$$c_1 = 6, \quad c_2 = -4$$

在振动中，梁段的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j m_{ij}\dot{z}_i(t)\dot{z}_j(t)$$

其中

$$m_{ij} = m_{ji} = \int_0^l \rho\varphi_i(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x$$

将各个假设的 $\varphi_i$ 代入上式；对于梁段 1，可得

$$m_{11} = 0.200\,0\rho l$$

$$m_{12} = m_{21} = 0.166\,6\rho l$$

$$m_{22} = 0.142\,8\rho l$$

对于梁段 2，可得

$$m_{33} = 1.000\,0\rho l$$

$$m_{34} = m_{43} = m_{35} = m_{53} = 0$$

$$m_{44} = 0.333\,3\rho l$$

$$m_{54} = m_{45} = 0.866\,6\rho l$$

$$m_{55} = 2.311\ 1\rho l$$

其中,因为梁的纵向位移 $u_2$ 与横向位移 $y_2$ 不发生耦合,故有 $m_{34} = m_{43} = m_{35} = m_{53} = 0$

梁段的势能表示式为

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j k_{ij}z_i(t)z_j(t)$$

其中 $k_{ij}$ 的表示式为

$$k_{ij} = \int_0^l EI\varphi_i''(x)\varphi_j''(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(弯振)}$$

或

$$k_{ij} = \int_0^l EA\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(纵振)}$$

将各个假设的 $\varphi_i$ 对 $x$ 求导数,得

$$\varphi''(x_1) = 2/l^2$$

$$\varphi_2''(x_1) = 6x_1/l^3$$

$$\varphi_3'(x_2) = 0$$

$$\varphi_4''(x_2) = 0$$

$$\varphi_5''(x_2) = 12(1/l^2 - 2x_2/l^3 + x_2^2/l^4)$$

将它们代入 $k_{ij}$ 的相应表示式,可得

$$k_{11} = 4EI/l^3$$

$$k_{12} = k_{21} = 6EI/l^3$$

$$k_{22} = 12EI/l^3$$

$$k_{55} = 28.8EI/l^3$$

而其余的 $k_{ij}$ 均为零。记

$$\boldsymbol{z} = [z_1 \cdots z_5]^{\mathrm{T}}$$

系统的动能可写成矩阵形式

$$E_k = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{z}}$$

其中

$$M = [m_{ij}],\quad i,j = 1,2,\cdots,5$$

系统的势能亦可写成矩阵形式

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}$$

其中

$$\boldsymbol{K} = [k_{ij}],\quad i,j = 1,2,\cdots,5$$

但是，以上所得系统的动能与势能的表示式中的各个变量 $z_i$ 不完全是独立的。所以，还必须用对接条件消去这种不独立性。

由位移协调条件，有

$$y_1(l,t) = u_2(0,t)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(l,t) = \frac{\partial y_2}{\partial x_2}(0,t)$$

由此得

$$z_1 + z_2 = z_3,\quad 2z_1 + 3z_2 = z_4 \tag{7.4.2}$$

再由弯矩协调条件，有

$$EI\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}(l,t) = EI\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2}(0,t)$$

由此得

$$z_1 + 3z_2 = 6z_5 \tag{7.4.3}$$

这样，我们得到了含有 5 个变量的 3 个独立的线性代数方程 (7.4.2) 与(7.4.3)。因此，可以任选其中两个变量作为独立变量。例如，取 $z_1$ 与 $z_2$ 作为独立变量，令

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

由方程(7.4.2)，(7.4.3) 可得

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{q}$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 1/6\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1/2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

将它代入系统动能与势能的表示式中，可得

$$\left.\begin{aligned}E_{\mathrm{k}}&=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{q}}\\ E_{\mathrm{p}}&=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}\end{aligned}\right\}\tag{7.4.4}$$

这时，系统的动能与势能都已由独立变量来表示。将式(7.4.4)中的 $E_{\mathrm{k}}$ 与 $E_{\mathrm{p}}$ 代入拉格朗日方程，得

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{B}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}\tag{7.4.5}$$

且有

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{B}=\rho l\begin{bmatrix}3.175 & 4.659\\ 4.659 & 7.321\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}4.8 & 8.4\\ 8.4 & 19.2\end{bmatrix}$$

将系统(7.4.5)的主振动表示为

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0\sin pt$$

容易解得系统(7.4.5)的固有频率为

$$p_1=1.172\sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}}$$

$$p_2=3.179\sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}}$$

与之相应的特征矢量为

$$\boldsymbol{q}_{01}=[1\quad -0.219]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{q}_{02}=[1\quad -0.705]^{\mathrm{T}}$$

返回到变量 $\boldsymbol{z}$，主振动可表示为

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0\sin pt$$

由此得

$$z_{01}=\begin{bmatrix}1.000\\-0.219\\0.781\\1.343\\0.057\end{bmatrix},\quad z_{02}=\begin{bmatrix}1.000\\-0.705\\0.295\\-0.115\\-0.186\end{bmatrix}$$

上面得到的 $p_1$ 与 $p_2$ 就是均匀直角梁平面弯曲振动的前 2 阶近似固有频率。至于与 $z$ 相应的直角梁近似振型函数，则可由 $z_{01}$ 与 $z_{02}$ 代替 $z$，分别代入式(7.4.1)求得。所得近似振型曲线如图 7.4.2 所示。

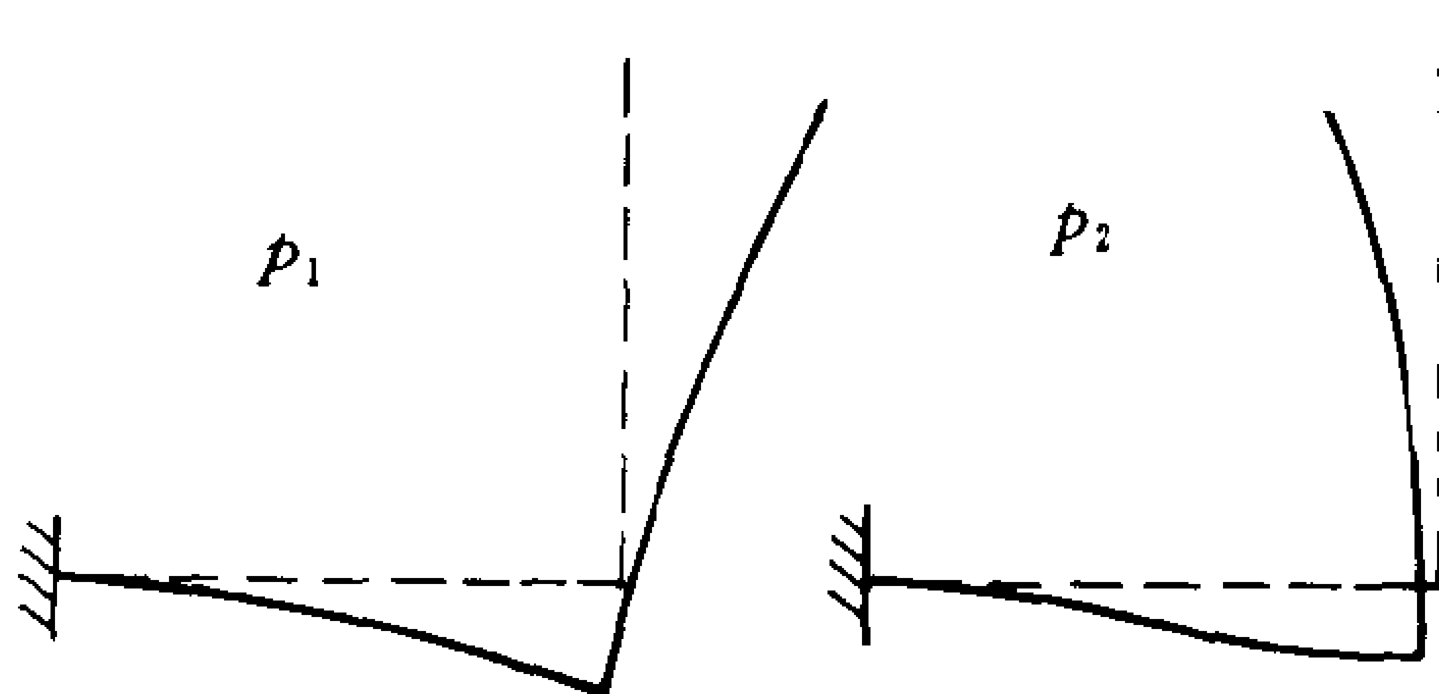



图 7.4.2　前 2 阶振型函数

已知上述直角梁的前 2 阶固有频率的准确解为

$$p_1=1.162\sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}},\quad p_2=3.168\sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}}$$

可见用模态综合法所得近似值仅较准确值高了 1% 左右。

以上通过实例阐明了赫第(W.C. Hurty)最先提出来的经典模态综合法的要点。在经典模态综合法的基础上，结合计算技术的发展，后人又作了许多改进。这些改进基本上是围绕以下两个方面进行的：一是力图使分析的程式规格化，以便在计算机上编程求解；二是尽可能提高模态综合效率，也就是以最小的综合自由度数来获得所需高精度的整体动态特性。

下面介绍一些典型的子结构模态，根据具体情况合理地选用其中一些子模态，可有效地提高模态综合的精度与效率。

1. 无刚体运动的子结构

(1) 振动主模态

设子结构的特征值问题可提出为

$$[\boldsymbol{k}-\lambda_i \boldsymbol{m}]\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{0}$$

其中

$\boldsymbol{k}$ —— 子结构刚度矩阵，$n\times n$ 阶；

$\boldsymbol{m}$ —— 子结构质量矩阵，$n\times n$ 阶；

$\boldsymbol{a}_i$ —— 子结构第 $i$ 阶特征矢量；

$\lambda_i$ —— 子结构第 $i$ 阶特征值。

这时，子结构的模态矩阵可表示为

$$\boldsymbol{A}_n=[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$$

且可归一化为

$$\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}\boldsymbol{A}_n=\boldsymbol{I}_{nn} \quad (\boldsymbol{I}_{nn}\text{ 为 } n\times n \text{ 阶单位阵})$$

$$\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}_n=\mathrm{diag}[\lambda_i]=\boldsymbol{\lambda}$$

(2)(固定界面)约束模态

**约束模态**是指子结构固定界面的节点坐标集 $c$ 中任一坐标发生单位位移，而其余坐标位移都为零时，该子结构发生的静变形模态。不失一般性，可将约束模态矩阵表示为

$$\boldsymbol{B}_c=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{vc}\\ \boldsymbol{I}_{cc}\end{bmatrix},\text{其中 } v=n-c$$

这时，只有在坐标集 $c$ 上产生反力，故有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{k}_{vv} & \boldsymbol{k}_{vc}\\ \boldsymbol{k}_{cv} & \boldsymbol{k}_{cc}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{vc}\\ \boldsymbol{I}_{cc}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{vc}\\ \boldsymbol{R}_{cc}\end{bmatrix}$$

其中

$\boldsymbol{0}_{vc}$ —— $v\times c$ 阶零矩阵；

$\boldsymbol{R}_{cc}$ —— 坐标集 $c$ 上产生的反力矩阵。

由于

$$\boldsymbol{k}_{vv}\boldsymbol{B}_{vc}+\boldsymbol{k}_{vc}\boldsymbol{I}_{cc}=\boldsymbol{0}_{vc}$$

得

$$\boldsymbol{B}_{vc} = -\boldsymbol{k}_{vv}^{-1}\boldsymbol{k}_{vc}$$

因而有

$$\boldsymbol{B}_c = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{k}_{vv}^{-1} & \boldsymbol{k}_{vc} \\ & \boldsymbol{I}_{cc} \end{bmatrix}$$

更确切地说，约束模态实际上是约束释放模态，是在固定界面约束坐标集 $c$ 中，逐一地释放每个坐标约束时得到的相应可能静变形模态。因此，约束模态集与固定界面条件下的振动主模态集是相互独立的。

(3)（自由界面）附着模态

**附着模态**是指子结构自由界面的节点坐标集 $a$ 上沿着任一坐标方向作用着单位力，而在其余坐标方向上作用力都为零时，该子结构发生的相应静变形模态。设附着模态矩阵为

$$\boldsymbol{B}_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{wa} \\ \boldsymbol{B}_{aa} \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } w = n - a$$

这时，有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{ww} & \boldsymbol{k}_{wa} \\ \boldsymbol{k}_{aw} & \boldsymbol{k}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{wa} \\ \boldsymbol{B}_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{wa} \\ \boldsymbol{I}_{aa} \end{bmatrix}$$

令子结构的柔度矩阵为

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{k}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_{ww} & \boldsymbol{g}_{wa} \\ \boldsymbol{g}_{aw} & \boldsymbol{g}_{aa} \end{bmatrix}$$

于是有

$$\boldsymbol{B}_a = \boldsymbol{G}\begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{wa} \\ \boldsymbol{I}_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_{wa} \\ \boldsymbol{g}_{aa} \end{bmatrix}$$

可见，附着模态是自由界面子结构的静柔度模态。由于它和自由界面子结构的振动主模态具有相同的几何边界条件，所以两者是线性相关的。

(4)（自由界面）剩余附着模态

将子结构的主模态矩阵 $A_n$ 按选用模态子集 $A_k$ 与剩余模态子集 $A_d$ 分块，写成

$$A_n = [A_k \quad A_d], \qquad 其中 k + d = n$$

注意，子结构的柔度矩阵 $G$ 为

$$\begin{aligned} G &= k^{-1} = A_n \lambda^{-1} A_n^{\mathrm{T}} \\ &= A_k \lambda_{kk}^{-1} A_k^{\mathrm{T}} + A_d \lambda_{dd}^{-1} A_d^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

现定义子结构的剩余柔度矩阵为

$$G_d = A_d \lambda_{dd}^{-1} A_d^{\mathrm{T}} = G - A_k \lambda_{kk}^{-1} A_k^{\mathrm{T}}$$

只要知道子结构的柔度矩阵 $G$ 与选用主模态集 $A_k$ 及其相应的特征值子阵 $\lambda_{kk}$、那末 $G_d$ 也就完全确定了。

定义由剩余柔度矩阵确定的**剩余附着模态集** $B_d$ 为

$$\begin{aligned} B_d &= G_d \begin{bmatrix} 0_{wa} \\ I_{aa} \end{bmatrix} = A_d \lambda_{dd}^{-1} [A_{wa}^{\mathrm{T}} \ A_{ad}^{\mathrm{T}}] \begin{bmatrix} 0_{wa} \\ I_{aa} \end{bmatrix} \\ &= A_d \lambda_{dd}^{-1} A_{ad}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

可见，剩余附着模态集 $B_d$ 可以由剩余主模态集 $A_d$ 线性地表示。由于 $A_d$ 与选用主模态集 $A_k$ 正交，因而剩余附着模态集 $B_d$ 与选用主模态集 $A_k$ 线性独立。对于模态综合精度的提高来说，$B_d$ 是 $A_k$ 的合理补充。

2. 带刚体运动的子结构

(1) 刚体模态

设子结构有 $r$ 个刚体运动自由度，相应的刚体模态集表示为 $B_r$，且可归一化为

$$B_r^{\mathrm{T}} m B_r = I_{rr}$$

$$B_r^{\mathrm{T}} k B_r = 0_{rr}$$

(2) 振动主模态

这里，振动主模态是指弹性振支主模态，对应于非零的固有频率。弹性主模态的确定可参照 5.9 节所述方法。

(3) 惯性释放附着模态

由于附着模态与子结构的柔度矩阵有密切联系，而带刚体运动的子结构的刚度矩阵是奇异的，这就给如何理解这一情形下的附着模态带来困难。本书5.9节的结果可能有助于理解这一问题。

首先对子结构进行缩聚变换 $\boldsymbol{P}$（参见5.9节），使变换后的缩聚系统的刚度矩阵 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}\boldsymbol{P}$ 是正定的，而与之对应的柔度矩阵可得为

$$\boldsymbol{G}=[\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{P}]^{-1},\ (n-r)\times(n-r)\text{ 阶}$$

这时，假设在子结构自由界面节点坐标集 $a$ 上作用有单位力系 $\boldsymbol{F}_a$，其为

$$\boldsymbol{F}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{wa}\\ \boldsymbol{I}_{aa}\end{bmatrix}$$

这相当于在缩聚系统上作用有广义力

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_a=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{wa}\\ \boldsymbol{I}_{aa}\end{bmatrix}$$

现定义缩聚系统的附着模态 $\boldsymbol{B}_a'$ 为

$$\boldsymbol{B}_a'=\boldsymbol{G}\boldsymbol{F}$$

返回到子结构，相应的附着模态 $\boldsymbol{B}_a$ 为

$$\boldsymbol{B}_a=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_a'=\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}\boldsymbol{F}$$

不难看到，这样定义的 $\boldsymbol{B}_a$ 就是现有模态综合文献上常提到的**惯性释放附着模态**。由于它与振动主模态集具有相同的边界条件，所以两者是线性相关的。

（4）剩余惯性释放附着模态

上面由缩聚正定系统的附着模态导出了子结构惯性释放附着模态，此办法不难推广到由缩聚系统的剩余附着模态来导出子结构的剩余惯性释放附着模态。

设缩聚系统的振动主模态矩阵可按选用的与剩余的主模态集分块为

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_k\quad \boldsymbol{A}_d],\ \text{其中 } k+d=n-r$$

于是，缩聚系统的柔度矩阵可表示为

$$G = A\lambda_{n-r}^{-1}A^{\mathrm{T}} = A_k\lambda_{kk}^{-1}A_k^{\mathrm{T}} + A_d\lambda_{dd}^{-1}A_d^{\mathrm{T}}$$

定义缩聚系统的剩余柔度矩阵为

$$G_d = A_d\lambda_{dd}^{-1}A_d^{\mathrm{T}} = G - A_k\lambda_{kk}^{-1}A_k^{\mathrm{T}}$$

再定义缩聚系统的剩余附着模态为

$$B_d' = G_dF = A_d(\lambda_{dd}^{-1}A_d^{\mathrm{T}}F)$$

可见，$B_d'$ 可由 $A_d$ 线性地表示。

返回到子结构，有

$$B_d = PB_d' = PG_dF$$

不难看到，$B_d$ 就是现有模态综合文献中提到的**剩余惯性释放附着模态**。由于它与子结构选用的主模态集 $A_k$ 线性无关，所以它是 $A_k$ 的合理补充。

综上所述，选取子结构模态的一般原则为：

对于约束子结构，既可取固定界面主模态补充以约束模态，也可取自由界面主模态补充以剩余附着模态。

对于自由子结构，可取自由界面主模态（包括刚体运动模态）补充以剩余惯性释放附着模态。

## 7.5 有限元法

有限元法也是一种将连续系统离散化的方法。这种方法先把复杂结构分割成若干个彼此之间只在结点处相互连接的单元，每个单元都是一个弹性体，单元位移用结点位移插值函数来表示。这一过程与集中质量法相似，但并不是把每个单元的质量简单地向结点处集中，而是对每个单元，由位移插值函数和动力学基本原理决定质量矩阵及其它特征矩阵。另外，插值函数实际就是一种假设模态，它和前述的假设模态法不同之处在于：

(1) 这里不是对整个结构，也不是对各子结构，而是对每个单元取假设模态。由于单元数目通常比较多（即单元尺寸相对地小），

所以它们的假设模态可以取得非常简单。

(2) 它是以结点位移作为系统的广义坐标，所以常常可以降低系统微分方程的耦合程度，给用计算机求解带来方便。

当今，有限元法已成为分析复杂结构的有效方法和手段，随着计算机的普遍使用和高速发展，它的应用也愈来愈深入和广泛。当今有限元方法的理论和应用已成为一门专门的学科。限于本书的篇幅和任务，这里只以梁的弯曲振动为例，介绍有限元法的基本思想和分析步骤，为进一步学习打下基础。

1. 结构的离散化

先把梁分成 $s$ 个单元，再分别对单元和结点进行编号(见图 7.5.1)。梁在结点处的位移可用结点所在截面的挠度和转角来表达，并被取作结点广义坐标。若不受约束的话，每个结点有两个自由度，$n$ 个结点有 $2n$ 个自由度，显然结构划分得越细，则自由度数就越大，计算精度也越高。但计算工作量和要用的机时也越大。故要根据实际情况和要求，综合考虑精度要求和计算量两方面的因素，对结构进行适当、合理的分割。

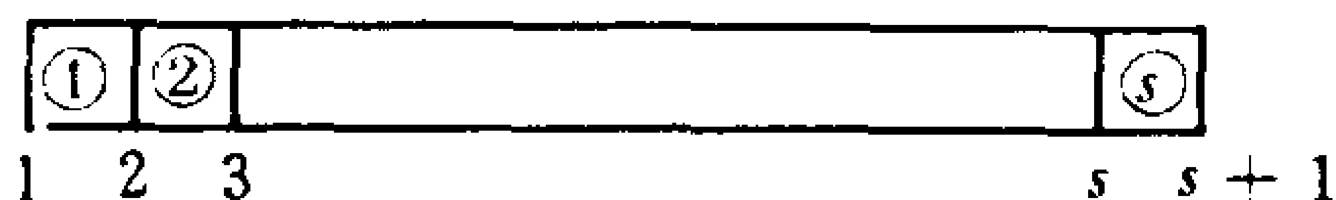



图 7.5.1　梁的有限元模型

2. 单元特性分析

在梁上任取一单元，如图 7.5.2 所示。图中坐标原点取在单元左端，$x$ 轴沿单元轴线。这种与单元相联系的坐标系也称为局部坐标系。设单元长度为 $l$，抗弯刚度为 $EI(x)$，单位长度的质量为 $\rho$，由于单元长度一般很小，所以，

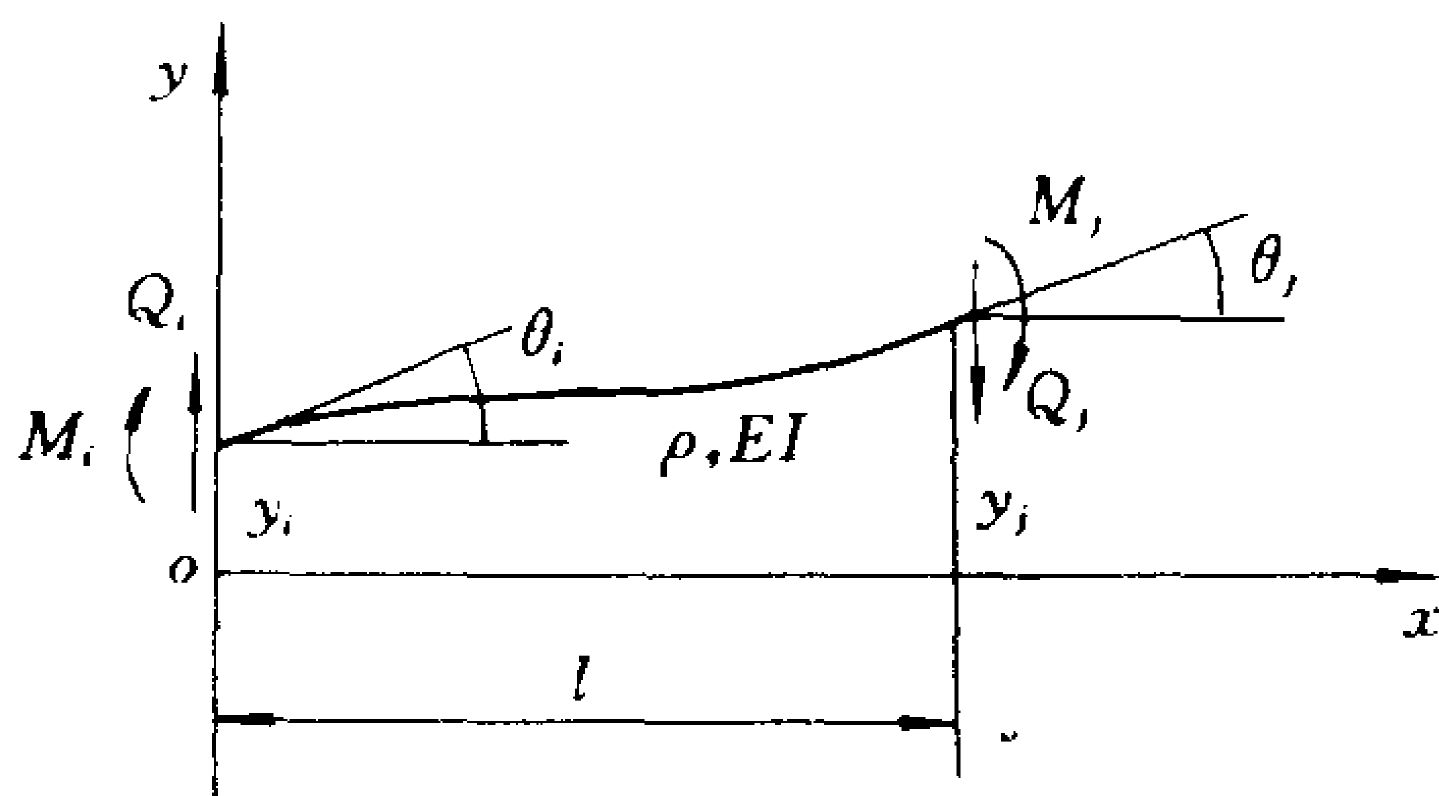



图 7.5.2　梁单元

$EI$、$\rho$ 均可当做常量。对所考虑的单元，假定左右端编号分别为 $i$，$j$，相应的结点位移为 $y_i,\theta_i,y_i,\theta_j$，它们的正方向如图 7.5.2 所示。为了选取单元在弯曲振动中的插值函数，我们先来看长度为 $l$ 的均匀梁段在常值结点力作用下的静挠曲线。

梁的挠曲线微分方程为

$$y^{(4)} = 0 \tag{7.5.1}$$

此方程的解为

$$y(x) = c_1 + c_2 \frac{x}{l} + c_3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + c_4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \tag{7.5.2}$$

式中用$\frac{x}{l}$而不是用 $x$，是为了使 $c_i$ 具有相同的量纲，$c_i(i = 1,2,3,4)$ 取决于边界条件。梁单元两端提供 4 个边界条件，即

$$\left.\begin{aligned} y(0) = y_i, \quad y'(0) = \theta_i \\ y(l) = y_j, \quad y'(l) = \theta_j \end{aligned}\right\} \tag{7.5.3}$$

将边界条件代入式(7.5.2)有

$$\left.\begin{aligned} y_i &= c_1 \\ l\theta_i &= c_2 \\ y_j &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \\ l\theta_j &= c_2 + 2c_3 + 3c_4 \end{aligned}\right\} \tag{7.5.4}$$

由上式解出

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= y_i \\ c_2 &= l\theta_i \\ c_3 &= -3y_i + 3y_j - 2l\theta_i - l\theta_j \\ c_4 &= 2y_i + l\theta_i - 2y_j + l\theta_j \end{aligned}\right\} \tag{7.5.5}$$

将式(7.5.5)代入式(7.5.2)中，有

$$y(x) = \varphi_{iy}(x)y_i + \varphi_{i\theta}(x)\theta_i + \varphi_{jy}(x)y_j + \varphi_{j\theta}(x)\theta_j$$

即梁的位移 $y(x,t)$ 是 4 个结点位移的线性组合，其系数由下式确定

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_{iy}(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\
\varphi_{i\theta}(x) &= x - 2l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\
\varphi_{jy}(x) &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\
\varphi_{j\theta}(x) &= -l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3
\end{aligned}\right\} \tag{7.5.6}
$$

这些函数如图 7.5.3 所示，它们分别表示在对应的广义坐标方向上产生单位位移时梁段的静挠曲线，也称做插值函数或形函数。

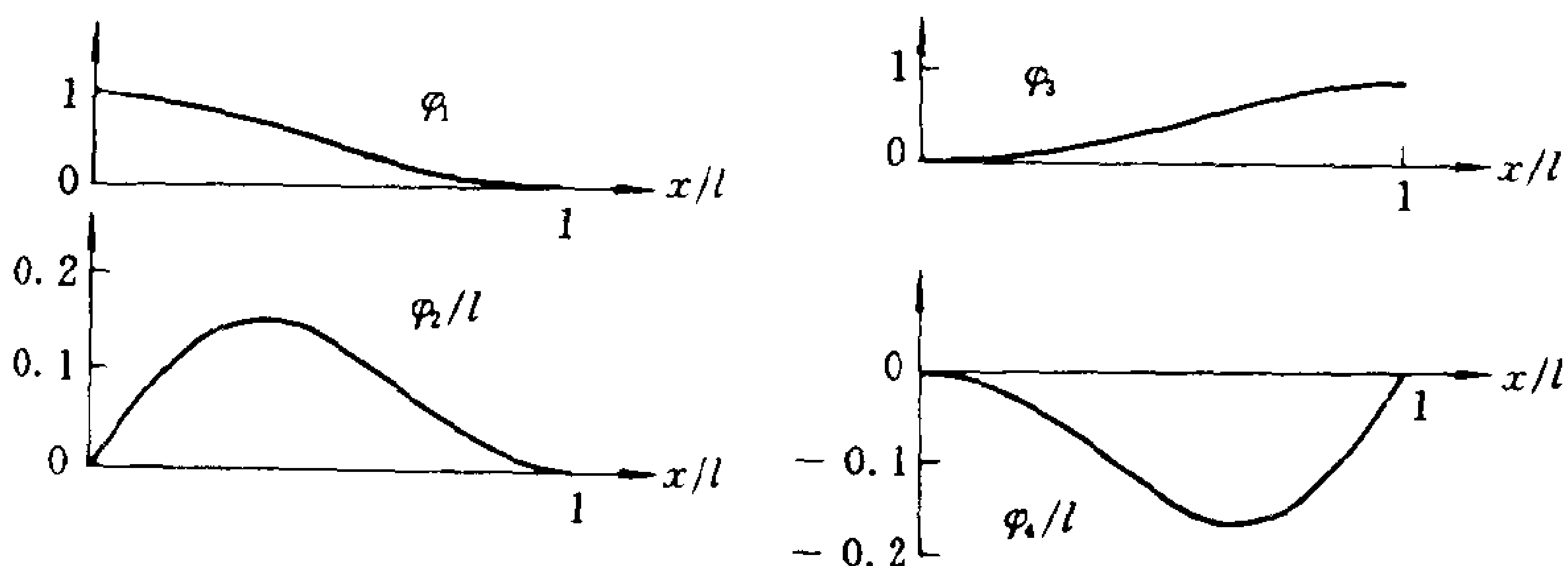



图 7.5.3　形函数

在梁的弯曲振动中，梁的挠度不仅是 $x$ 的函数，也是时间 $t$ 的函数。作为近似，我们仍假定在振动中，梁单元的插值函数与式(7.5.6)相同，即单元内位移的表达式为

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= N_{ij}(x)y_i(t) + N_{i\theta}\theta_i(t) + N_{ij}y_j(t) \\
&\quad + N_{j\theta}\theta_j(t) = N(x)q_e(t)
\end{aligned} \tag{7.5.7}
$$

其中

$$
\boldsymbol{N} = [N_{iy}(x), N_{i\theta}(x), N_{jy}(x), N_{j\theta}(x)] = [\varphi_{iy}, \varphi_{i\theta}, \varphi_{jy}, \varphi_{j\theta}]
$$

$$
\boldsymbol{q}_e(t) = [y_i(t), \theta_i(t), y_j(t), \theta_j(t)]^{\mathrm{T}}
$$

$\boldsymbol{N}$ 为插值函数矩阵，$\boldsymbol{q}_e(t)$ 为结点位移列阵，式(7.5.7) 也称做单元

的位移模式。

建立了单元位移模式后，其动能、势能均可用结点位移表示。单元的动能为

$$E_{ke}=\frac{1}{2}\int_0^l\rho(\frac{\partial y}{\partial t})^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}_e^{\mathrm{T}}\int_0^l\rho\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}x\dot{\boldsymbol{q}}_e$$

$$=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}\dot{\boldsymbol{q}}_e \tag{7.5.8}$$

其中 $\boldsymbol{m}$ 为单元质量矩阵，并有

$$\boldsymbol{m}=\int_0^l\rho\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}x \tag{7.5.9}$$

将式(7.5.6)代入上式，经积分后得到

$$\boldsymbol{m}=\frac{\rho l}{420}\begin{bmatrix}156 & 22l & 54 & -13l\\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2\\ 54 & 13l & 156 & -22l\\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2\end{bmatrix} \tag{7.5.10}$$

单元的势能可表示为

$$\boldsymbol{E}_{pe}=\frac{1}{2}\int_0^l EI(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2})^2\mathrm{d}x=\frac{\boldsymbol{q}_e^{\mathrm{T}}}{2}\int_0^l EI(\boldsymbol{N}'')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}''\mathrm{d}x\boldsymbol{q}_e$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}_e \tag{7.5.11}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为单元刚度矩阵，并有

$$\boldsymbol{K}=\int_0^l EI(N'')^{\mathrm{T}}N''\mathrm{d}x \tag{7.5.12}$$

考虑到式(7.5.6)得

$$\boldsymbol{k}=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}12 & 6l & -12 & 6l\\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2\\ -12 & -6l & 12 & -6l\\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2\end{bmatrix} \tag{7.5.13}$$

现在来考虑阻尼矩阵和广义力列阵。在梁的弯曲简化理论中，梁单元间的相互作用力只有弯矩和剪力。对所考虑的单元，单元两

端的剪力和弯矩用 $M_i, Q_i, M_j, Q_j$ 表示，并记

$$P_e = [M_i \; Q_i \; M_j \; Q_j]^{\mathrm{T}}$$

为单元结点力列向量。一般情况下，梁上还存在分布载荷 $f(x,t)$ 和阻尼力。如果限于讨论粘性阻尼，则沿单元长度分布的阻尼力可表示为

$$R(x,t) = -r\dot{y} = -rN(x)\dot{q}_e(t) \qquad (7.5.14)$$

其中 $r$ 是阻尼系数，它等于单位速度下，作用在梁上单位长度的阻尼力。当梁上发生虚位移 $\delta q_e$ 时，作用在单元上所有外力的虚功为

$$\begin{aligned}\delta W &= \delta q_e^{\mathrm{T}} P_e + \int_0^l f(x,t)\delta y(x,t)\mathrm{d}x - \int_0^l rN(x)\dot{q}_e(t)\delta y(x,t)\mathrm{d}x \\ &= \delta q_e^{\mathrm{T}}\left\{P_e + \int_0^l f(x,t)W^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{d}x - \int_0^l rN^{\mathrm{T}}(x)N(x)\mathrm{d}x\dot{q}_e^{\mathrm{T}}\right\}\end{aligned} \qquad (7.5.15)$$

又按广义力的定义有

$$\delta W = \delta q_e^{\mathrm{T}} Q_e$$

故广义力列阵为

$$\begin{aligned}Q_e &= P_e + \int_0^l f(x,t)N^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{d}x - \int_0^l rN^{\mathrm{T}}(x)N(x)\mathrm{d}x\dot{q}_e(t) \\ &= P_e + F_e - c\dot{q}_e\end{aligned} \qquad (7.5.16)$$

其中

$$F_e = \int_0^l f(x,t)N^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{d}x \qquad (7.5.17)$$

$$c = \int_0^l rN^{\mathrm{T}}(x)N(x)\mathrm{d}x \qquad (7.5.18)$$

$c$ 是单元的阻尼矩阵，比较式(7.5.9)和式(7.5.18)可见，除所含系数 $r$ 与 $\rho$ 不同外，$c$ 和 $m_e$ 具有相同的表达形式。

将得到的单元动能、势能、广义力的表达式代入拉格朗日方程中，便可写出梁单元的运动微分方程为

$$m\ddot{q}_e + c\dot{q}_e + kq_e = P_e + F_e \qquad (7.5.19)$$

3. 结构的综合

已知单元的运动方程还不能求解，因为它没有反映各单元之间的联系和结构的约束条件，因此还必须建立整个系统的运动方程。

首先引进总结点位移向量 $\boldsymbol{q}$，其为

$$\boldsymbol{q} = (y_1\ \theta_1\ y_2\ \theta_2\ \cdots\ y_n\ \theta_n)^{\mathrm{T}}$$

并给出 $\boldsymbol{q}$ 与单元结点位移向量 $\boldsymbol{q}_e$ 的关系矩阵 $\boldsymbol{A}_i$，由此写出

$$\boldsymbol{q}_{ei} = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{q},\quad i = 1,2,\cdots,s \tag{7.5.20}$$

式中 $i$ 为单元编号，$s$ 为单元数目，$\boldsymbol{A}_i$ 是一长方阵，其行数是单元的自由度数，列数是系统的自由度数。根据式(7.5.8) 整个系统的动能 $E_{\mathrm{k}}$ 为

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\dot{\boldsymbol{q}}_{ei}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_i\dot{\boldsymbol{q}}_{ei} \tag{7.5.21}$$

将式(7.5.20) 代入上式，得

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{k}} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{A}_i\dot{\boldsymbol{q}} \\ &= \frac{\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}}{2}\Big(\sum_{i=1}^{s}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{A}_i\Big)\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}} \end{aligned} \tag{7.5.22}$$

式中

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{s}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{A}_i \tag{7.5.23}$$

$\boldsymbol{M}$ 是总体坐标系下，整个系统的质量矩阵。按照同样方法可求得总刚度矩阵、总阻尼矩阵和对应于总结点位移的广义力列阵分别为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{K} &= \sum\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}_i \\ \boldsymbol{C} &= \sum\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}_i \\ \boldsymbol{R} &= \sum\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_e + \boldsymbol{F}_e) \end{aligned}\right\} \tag{7.5.24}$$

可以看出，$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{C}$ 都是对称矩阵。对于独立广义坐标组成的列阵 $\boldsymbol{q}$，系统的运动微分方程为

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = R \tag{7.5.25}$$

下面进一步考虑系统结构的边界条件。设边界条件给出的是零结点位移，这时可从总结点位移列阵中去掉这些零元素，从而使方程(7.5.25)降价。

现在把 $q$ 分成两个子列阵

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ \hline q_1 \end{bmatrix} \tag{7.5.26}$$

为分析方便，可令 $q_0 = 0$，它是被约束的结点位移。这样，独立的广义坐标组成的列阵就是 $q_1$。与 $q$ 的划分相对应，把 $M$、$K$、$C$、$R$ 也分成相应的子块

$$M = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{01} \\ K_{10} & K_{11} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} R_0 \\ \hline R_1 \end{bmatrix} \tag{7.5.27}$$

其中，$M_{00}$，$K_{00}$，$C_{00}$ 都是方阵，它们的阶数和 $q_0$ 的行数相同；$M_{11}$，$K_{11}$，$C_{11}$ 同样也是方阵，它们的阶数和 $q_1$ 的行数相同。另外，由于结点力是作用力和反作用力的关系，所以子列阵 $R_0$ 实际上是被约束的结点位移处产生的动反力，是未知量。而 $R_1$ 是只包含外载荷的，对应于非约束结点位移的广义力列阵，它是已知量。

将式(7.5.26)和式(7.5.27)代入方程(7.5.25)中，考察到 $q_0 = 0$，于是有

$$M_{11}\ddot{q}_1 + C_{11}\dot{q}_1 + K_{11}q_1 = R_1 \tag{7.5.28}$$

$$M_{01}\ddot{q}_1 + C_{01}\dot{q}_1 + K_{01}q_1 = R_0 \tag{7.5.29}$$

由上式可见，在综合得到了系统的质量矩阵 $M$、刚度矩阵 $K$、阻尼阵 $C$ 和广义力列阵 $R$ 后，进行适当的分块，便可利用多自由度系统振动分析的方法，对方程(7.5.28)进行求解，确定系统的固有频率及主振型以及对外激扰的动响应。

若边界条件给出的不是零结点位移，而是某一个已知的位移

子列阵 $q_0$，这时上述方法依然有效，只是方程(7.5.28)和(7.5.29)右端多了几项。顺便指出，由方程(7.5.28)求出 $q_1$ 后，也可由方程(7.5.29)求出约束处的动反力。

在式(7.5.20)中，我们引入了变换矩阵 $\boldsymbol{A}$，从中不难看出，它的任一行和任一列只有一个元素是1，其余元素是0。因此，当用 $\boldsymbol{A}$ 对各单元特性矩阵进行合同变换 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}\boldsymbol{A}$ 时，只不过是把 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}$ 中的元素原封不动地搬到 $\boldsymbol{0}_{m\times n}$ 矩阵中适当的位置上，即变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 起着定位的作用。由此可以想到我们也可以用更直接的方法来形成整个系统的特性矩阵。这里以质量矩阵为例来说明。

先把单元质量矩阵 $\boldsymbol{m}_{4\times4}$ 分成4个同阶子方阵，即

$$\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_{ii} & \boldsymbol{m}_{ij}\\ \boldsymbol{m}_{ji} & \boldsymbol{m}_{jj}\end{bmatrix}$$

这里，$i$ 和 $j$ 是单元两端结点的系统结点编号；再把 $\boldsymbol{m}$ 中的诸元素(子方阵)按其下标直接放到 $\boldsymbol{0}_{n\times n}$ 矩阵中相应的位置上，遇到下标相同的元素，则相加求和，这样便形成了质量矩阵 $\boldsymbol{M}$。如果考虑的约束给出零结点位移，那末最后再在 $\boldsymbol{M}$ 矩阵上划去被约束的结点坐标所在的行和列，得到我们所需要的质量矩阵 $\boldsymbol{M}_{11}$。通过同样过程，也可以形成系统刚度矩阵和阻尼矩阵。显然这种方法可以省去不必要的矩阵乘法运算，而使得形成系统特性矩阵的过程更加明了。

**例 7.5.1** 试用有限元法分析长为 $2l$ 的均匀悬臂梁的固有频率。

**解** 为简单起见，把梁分成两个长度均为 $l$ 的单元。全梁共有3个结点，取总结点位移列阵 $\boldsymbol{q}$ 为

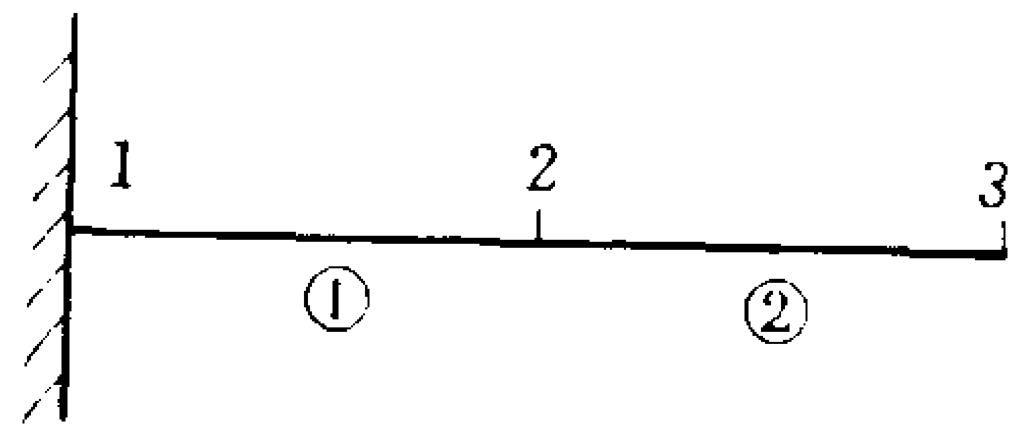


图 7.5.4 两单元划分

$$\boldsymbol{q}=(y_1\ \theta_1\ y_2\ \theta_2\ y_3\ \theta_3)^{\mathrm{T}}$$

两个单元的质量阵和刚度阵分别为

$$\boldsymbol{m}_1=\boldsymbol{m}_2=\frac{\rho l}{420}\begin{bmatrix}156 & 22l & 54 & -13l\\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2\\ 54 & 13l & 156 & -22l\\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2\end{bmatrix} \tag{a}$$

$$\boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{k}_2=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}12 & 6l & -12 & 6l\\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2\\ -12 & -6l & 12 & -6l\\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2\end{bmatrix} \tag{b}$$

由式(7.5.20)不难确定 $A_i$ 为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

再利用式(7.5.23)、(7.5.24)，可以确定总质量阵 $\boldsymbol{M}$ 和刚度阵 $\boldsymbol{K}$ 分别为

$$\boldsymbol{M}=\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{A}_i$$

$$=\frac{\rho l}{420}\left[\begin{array}{cc:cccc}156 & 22l & 54 & -13l & 0 & 0\\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0\\ \hdashline 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l\\ -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2\\ 0 & 0 & 54 & 13l & 156 & -22l\\ 0 & 0 & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2\end{array}\right] \tag{c}$$

$$\boldsymbol{K}=\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{A}_i$$

$$
= \frac{EI}{l^3}\left[\begin{array}{cc:cccc}
12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\
6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\
\hdashline
-12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\
6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\
0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\
0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2
\end{array}\right] \qquad (d)
$$

由给定的边界条件有 $y_1 = \theta_1 = 0$，因而两个结点位移子列阵为

$$
\boldsymbol{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_2 \\ y_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}
$$

与此对应，把 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$ 也划分成上面虚线表示的各子矩阵，其中

$$
\boldsymbol{M}_{11} = \frac{\rho l}{420}\begin{bmatrix}
321 & 0 & 54 & -13l \\
0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\
54 & 13l & 156 & -22l \\
-13l & -3l^2 & -22l & 4l^2
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{K}_{11} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}
24 & 0 & -12 & 6l \\
0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\
-12 & -6l & 12 & -6l \\
6l & 2l^2 & -6l & 4l^2
\end{bmatrix} \qquad (e)
$$

此题中，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$，因此，独立广义坐标所满足的运动微分方程为

$$
\boldsymbol{M}_{11}\ddot{\boldsymbol{q}}_1 + \boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{0}
$$

或

$$
\frac{\rho l}{420}\begin{bmatrix}
312 & 0 & 54 & -13l \\
0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\
54 & 13l & 156 & -22l \\
-13l & -3l^2 & -22l & 4l^2
\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}
$$

$$+\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}24 & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_2 \\ \theta_2 \\ y_3 \\ \theta_3\end{bmatrix}=0$$

由此得频率方程为

$$|\boldsymbol{K}_{11}-\boldsymbol{M}_{11}p^2|=0$$

从这一频率方程，可求得各阶固有频率的近似值为

$$p=3.519\alpha,\quad 22.22\alpha,\quad 75.16\alpha,\quad 218.1\alpha$$

其中
$$\alpha=\sqrt{\frac{EI}{\rho(2l)^4}}$$

而均匀悬臂梁前 4 阶频率的准确值为

$$p=3.515\alpha,\quad 22.04\alpha,\quad 61.70\alpha,\quad 120.91\alpha$$

可见，一阶频率近似值的误差为 0.1%，二阶频率的近似值的误差为 0.8%，三阶、四阶频率误差较大。要使得高阶频率也有较好的准确度，可将系统分成更多的单元。表 7.1 列举了梁弯曲振动特征值 $\lambda_i$ 的计算结果，从中可以看出有限元法的有效性。

**表 7.1　均匀梁弯曲振动的特征值 $\lambda_i$**

**固有圆频率 $p_i=\lambda_j^2\sqrt{\dfrac{EI}{\rho l^4}}$**

| 边界条件 | 固有频率阶次 / 元素数目 | 一阶 | 二阶 | 三阶 | 四阶 | 五阶 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 简支梁 | 2 | 3.148 | 6.620 | 10.495 | 14.170 | |
| | 4 | 3.142 | 6.296 | 9.511 | 13.239 | 16.691 |
| | 8 | 3.142 | 6.284 | 9.431 | 12.591 | 15.781 |
| | 准确解 | π | 2π | 3π | 4π | 5π |

续 表

| 边界条件 | 固有频率阶次 / 元素数目 | 一阶 | 二阶 | 三阶 | 四阶 | 五阶 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 悬臂梁 | 2 | 1.876 | 4.714 | 8.669 | 14.770 | |
| | 4 | 1.875 | 4.697 | 7.885 | 11.075 | 15.104 |
| | 8 | 1.875 | 4.694 | 7.857 | 11.008 | 14.178 |
| | 准确解 | 1.875 | 4.694 | 7.855 | 10.996 | 14.137 |
| 固支梁 | 2 | 4.768 | 9.054 | | | |
| | 4 | 4.733 | 7.889 | 11.113 | 15.285 | 19.657 |
| | 8 | 4.730 | 7.856 | 11.009 | 14.181 | 17.392 |
| | 准确解 | 4.730 | 7.853 | 10.996 | 14.137 | 17.279 |

此例中也可以直接形成质量矩阵和刚度矩阵。以质量矩阵为例，因为单元①与②具有相同的物理参数，并且取相同的插值函数，所以它们具有相同的质量矩阵与刚度矩阵，即有

$$\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2 \equiv \boldsymbol{m}, \quad \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2 \equiv \boldsymbol{k}$$

将 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 等分成 4 个子块，即

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{11} & \boldsymbol{m}_{12} \\ \boldsymbol{m}_{21} & \boldsymbol{m}_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{11} & \boldsymbol{k}_{12} \\ \boldsymbol{k}_{21} & \boldsymbol{k}_{22} \end{bmatrix}$$

这时，系统的总体坐标质量矩阵可表示为

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} + m_{11} & m_{12} \\ 0 & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$
= \frac{\rho l}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l & 0 & 0 \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l \\ -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 54 & 13l & 156 & -22l \\ 0 & 0 & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}
$$

对于悬臂梁，约束条件是 $y_1 = \theta_1 = 0$，故划去第一、二行及列，便可得到质量矩阵 $\boldsymbol{M}_{11}$。显然，此结果与式($e$)相同。读者可以作为练习，用此法形成刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{11}$。

# 第八章　振动控制概论

振动有其有利的一面，利用振动原理可以制成各种振动机械，提高工效。振动也有它有害的一面，例如振动会影响精密仪器设备的功能，降低加工精度，加剧构件的疲劳与磨损，缩短机器与结构的使用寿命，并恶化环境等。

通常所说振动控制实际上是指振动抑制，也就是设法把振动的危害限制到最小限度或减小到容许的程度。

振动抑制可分为被动式的与主动式的。前者属于事先一次性设计的振动抑制；后者利用反馈控制，自动地进行振动抑制。

被动式的振动抑制技术包括阻尼消振、隔振与动力吸振技术等。它们的抑振机理都可用前述振动理论加以说明。

## 8.1　阻尼消振

抑制振动的有效方法之一是加阻尼。在加阻尼之前必须弄清在原结构中已经存在多大的阻尼。确定原始阻尼非常重要，因为改进是在原来的基础上得到的。工程上，系统阻尼的大小通常用损耗因子来表示。损耗因子 $\eta$ 定义为

$$\eta = \frac{\text{半功率带宽}}{\text{共振频率}}$$

必须首先区分原结构是组装的，还是焊接的或整体加工的。组装结构是用紧固件，诸如铆钉、螺栓或螺钉等连接起来的。组装结构通常有较大的原始阻尼，它的损耗因子可高达 0.05。而整体结构的损耗因子与材料本身的差不多，对于钢或铝结构大约为 $10^{-4}$ ～

$10^{-5}$ 数量级。因此，要想使组装结构的损耗因子再加大 10 倍是很难做到的。

加大系统阻尼无非通过两个途径：一是外加各种阻尼器，包括干摩擦阻尼器；另一是采用复合材料或加贴粘弹性阻尼材料。

粘弹性材料是一种理想的高阻尼材料，它不仅可减小振动水平，还可降低噪声水平。工程上大多用粘贴自由阻尼层或约束阻尼层的办法来控制结构振动。前者利用拉压变形，后者利用剪切变形来消耗能量。约束阻尼层往往更为有效，特别是多层约束阻尼层。实践表明，在宽带激励下处于多模态共振的局部结构上粘贴多层约束阻尼层后，可有效地降低振动与噪声水平，提高疲劳寿命。这种消振技术已成功地应用于飞机与潜艇等军事工业。但是，粘弹性材料是一种高分子材料，对温度较敏感，在环境温度变化大于60℃ 的地方，减振效果不够理想。

复合材料有重量轻、比刚度与强度高等优点，所以被广泛采用于宇航工业。在设计中不仅要考虑刚度与强度的要求，还得考虑改进材料的内阻尼。纤维增强的复合材料采用粘弹性材料作基底可有效地提高内阻尼。

由于干摩擦阻尼几乎不受环境温度变化的影响，因此，受到人们的重视。实际的组装结构中大约 90% 的阻尼来自干摩擦阻尼。人为地加大干摩擦阻尼达到减振目的的成功实例已屡见报导。例如，曾经在 20 层楼的预制板结构的接头处加入汽车垫片后，顶楼的挠度可减小一半左右。此外，干摩擦阻尼也曾有效地用于抑制燃气轮机的叶片振动与核电站的管道振动等。

《振动阻尼》一书（参考书目 4）对阻尼消振有较详尽的介绍。

## 8.2 振动隔离

振动隔离有两种提法：一是减小振动机械（振源）对基础的力

传递；另一是减小基础振动对附着结构的运动传递。研究表明，二者的传递率具有共同的规律。

隔振通常是在结构与基础之间加隔振器来实现的，目的是使传递率达到最小。隔振器无非是弹性元件与阻尼元件的适当组合。

利用粘弹性材料可制成大阻尼隔振器，但往往不适应恶劣的环境条件。

利用干摩擦作用构成的钢丝绳隔振器，其损耗因子可高达0.34。而且钢丝绳隔振器具有渐软非线性刚度，对冲击有缓冲作用。此外，它能在恶劣的环境条件下工作。采用干摩擦阻尼器作为隔振元件时，其传递率与振动响应在有关振动手册中有较详细的介绍。

在建筑物与橡胶隔震器之间加入干摩擦垫片，可以在强地震时使橡胶隔震器相对于建筑物底部发生滑动，既保护了橡胶隔震器的完整性，又大大降低对建筑物的力传递。据报导，一座九层大楼由于采用了干摩擦隔振器，在经受一次强度为七级的地震时，传到建筑物上的力仅为地震力的 1/4 ～ 1/5。

3.7 节中已提及，利用反馈控制有可能改善隔振效果。

## 8.3 动力吸振

动力吸振是利用多自由度系统中的反共振特性，将振动能量转移到附加吸振器来减小主结构的振动。美国纽约市的一座大厦顶部装有动力吸振器，以减小风激振动，主要是抑制一阶模态振动，其吸振质量约为建筑物的当量模态质量的 1%，它能使振动减小 40% 左右。动力吸振器在船舶、内燃机、拖拉机、直升机上已屡见应用。

动力吸振器一般只适用于激振频率比较稳定的情形。由于它利用的反共振效应往往只在一个很窄的频带内起作用，即使经过

优化调谐设计的吸振器也难以适应激振频率有大幅度变化的情形。为了克服这一缺点，曾经出现过可变参数的动力吸振器。它可以通过反馈信息，随激振频率的变化而自动调整吸振器的参数，例如弹簧的刚度或吸振质量的布局，使吸振器能最有效地抑制振动。这种吸振器已去掉了一次性设定的弊端，在一定范围内可实现自动设定，因而更为有效。实际上，它已经是被动式振动控制与主动式振动控制的初步结合。

## 8.4　主动振动控制简介

随着生产与科学技术的发展，工程上对减振的要求愈来愈高，单纯的被动式振动控制方法难以满足这一要求。人们转而寻找新的振动控制途径。利用现代控制工程的成果，发展有源振动控制是一个方向。通常所说的主动振动控制就是这个含义。

主动振动控制系统包括控制对象、传感器、执行器、控制器及能源五个部分。由传感器得到的反馈信号，经调制放大后，传到控制器，由控制器形成所需的控制律，并发送指令到执行器，由执行器对结构施加控制力，所需能量由能源提供。由此构成一个闭环控制系统。

主动振动控制的核心问题是确定控制律。下面围绕主动式抑振设计问题，介绍最优控制理论在振动控制中的应用。

### 8.4.1　稳定性、能控性、能测性

稳定性、能控性、能测性是现代控制理论中三个重要的基本概念。现分别介绍如下：

1. 稳定性

**稳定性**是受控系统必须具备的性能之一。可以用自治状态变量系统来说明稳定性的概念。设定常自治线性系统的状态运动微

分方程可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{8.4.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$，是 $n$ 维状态矢量，$\boldsymbol{A}$ 为 $n \times n$ 阶常数矩阵。满足如下方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$$

的解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是上述系统的平衡状态。显然，当 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵时，$\bar{\boldsymbol{x}} = 0$ 是系统的唯一平衡状态。

**定义 1** 若对于任意的 $t_0$，以及任意的 $\varepsilon > 0$，总存在一个实数 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$，只要初始状态 $x_0$ 满足

$$\| \boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}} \| \leqslant \delta$$

就对于所有的 $t \geqslant t_0$，有

$$\| \boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}} \| < \varepsilon$$

则这一平衡状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 称为在**李雅普诺夫**(Liapunov) **意义下稳定的**。若上述 $\delta$ 不依赖于 $t_0$，则称为一致稳定的。

定义中，$\| \boldsymbol{x} \|$ 可以取为欧几里德范数：

$$\| \boldsymbol{x} \| = \{ \sum_i x_i^2 \}^{1/2}$$

也可以取其它合适的范数。

**定义 2** 设系统的平衡状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是稳定的，若对应于任意的 $t_0$，总存在一个 $\delta > 0$，只要初始状态满足

$$\| \boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}} \| \leqslant \delta$$

就有

$$\| \boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}} \| \to 0, \quad t \to \infty$$

则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 称为**渐近稳定的**。又若初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 无论取何值，上式都成立，则称此平衡状态是大范围渐近稳定的。对于线性系统来说，只要是渐近稳定的，它就是大范围的。

**定义 3** 设系统的平衡状态 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是稳定的，若对应于任意的初值 $\boldsymbol{x}_0$，总存在实数 $\alpha > 0$ 及 $\beta > 0$，并有

$$\| \boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}} \| \leqslant \alpha e^{-\beta(t - t_0)} \| \boldsymbol{x}_0 \|, \quad t \geqslant t_0$$

则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 称为**指数稳定的**。

在以上讨论中只提到了平衡状态的稳定性。实际上，对于定常线性系统来说，平衡状态的稳定性就意味着系统任意解的稳定性。考察与系统(6.4.1)对应的非自治系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(t) \qquad (8.4.2)$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 阶常数矩阵，$\boldsymbol{f}(t)$ 为 $m \times 1$ 阶时间函数列阵。设 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 是系统(8.4.2)对应于任意给定的初始条件的一个解，$\boldsymbol{x}$ 是对应于其它初始条件的解。由于 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 都满足方程(8.4.2)，因而 $\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}$ 满足方程(8.4.1)，即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}})$$

上式的零解是唯一平衡解。不难看到，$\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}$ 的零解稳定性就隐含着 $\tilde{x}$ 的稳定性。所以说，定常线性系统平衡解的稳定性与系统的稳定性是等同的。

对于定常线性系统来说，系统的稳定性判别可以简化为对系统特征值的判别。如前所述，若系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有各不相同的特征值 $s_i$，以及相应的彼此独立的特征矢量 $\boldsymbol{X}_i, i = 1,2,\cdots,n$，则系统(8.4.1)的任意一个解总可表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_i c_i \boldsymbol{X}_i \mathrm{e}^{s_i t}$$

其中各个 $c_i$ 是取决于初始条件的常数。可见，系统的稳定性取决于各个特征值的实部。

**定理 1**　定常线性系统(8.4.1)是稳定的，当且仅当系统满足：(*a*) $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值具有非正实部；(*b*) $\boldsymbol{A}$ 非亏损，即对于其中 $k$ 个特征值恰有 $k$ 个线性独立的特征矢量。

**定理 2**　定常线性系统(8.4.1)是渐近稳定的，当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值都具有负实部。

**定理 3**　定常线性系统是指数稳定的，当且仅当系统是渐近稳定的。

判别定常线性系统的特征根是否全部具有负实部有多种方法，其中包括著名的霍尔维茨(Hurwitz)法。

若系统(8.4.1)的特征多项式已知为

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$$

由此可构作 $n \times n$ 阶霍尔维茨矩阵 $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \tag{8.4.3}$$

这时，霍尔维茨判据可表述如下：系统(8.4.1)是渐近稳定的，当且仅当矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的所有主子式均为正。此外，只要特征多项式的系数中有一个系数为非正(即为零或负)，则系统就有可能是不稳定的。

根据上述判据，令矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的各阶主子式大于零，可得关于特征多项式系数的一系列非线性代数不等式，只有当全部不等式得到满足时，系统才是渐近稳定的。

例如，当系统特征多项式为三次方程时，有

$$\Delta(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

相应的矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

由霍尔维茨判据，首先必须有 $a_2 > 0$，$a_1 > 0$ 与 $a_0 > 0$。再由各阶主子式大于零，有

$$a_2 > 0$$

$$a_2 a_1 - a_0 > 0$$

$$a_2a_1a_0 - a_0^2 > 0$$

综合上述不等式,可得系统是渐近稳定的充要条件为

$$a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$$

以及

$$a_2a_1 - a_0 > 0$$

2. 能控性

**能控性**标志所加控制作用是否具有操纵系统全部状态变化的能力。若存在允许的控制 $\boldsymbol{Bu}(t)$,它能在有限的时间区间$[t_0,t_1]$内使系统从初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 能移至任意指定的终端状态 $\boldsymbol{x}(t_1)$,则称此时系统是状态能控的。若系统对任意的 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 都能控,则称此系统是完全状态能控的。

所谓允许的控制 $\boldsymbol{u}(t)$ 是指物理上可实现的控制矢量,即在所考察的有限时间区间$[t_0,t_1]$内,控制矢量的各个分量 $u_i(t)$ 均为平方可积函数,即有

$$\int_{t_0}^{t_1} u_i^2(t)\mathrm{d}t < \infty, \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

对系统的运动状态不能完全控制的外加作用是客观存在的。例如,作用于刚体的力,若其作用线通过刚体的质心,就无法控制刚体的转动。再如,作用于振动系统某个主振型结点上的力,就无法激起相应的模态运动。

设 $n$ 阶定常线性系统可描述为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{Cx} \end{aligned}\right\} \tag{8.4.4}$$

其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 分别为 $n \times n$、$n \times m$、$r \times m$ 阶常数矩阵。

这时,系统完全能控的充要条件有多种形式,其中之一可表述为

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{B} \ \boldsymbol{AB} \ \cdots \ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] = n \tag{8.4.5}$$

上述 $n \times nm$ 阶矩阵称为**能控性矩阵**。

当系统矩阵 $A$ 具有互异特征值时，总可以通过非奇异相似变换，将状态方程变换成对角形。即存在非奇异变换

$$x = Qz$$

可使得

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}[\lambda_i] \equiv \widetilde{A}$$

从而有

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= \widetilde{A}z + \widetilde{B}z \\ y &= \tilde{c}z \end{aligned}\right\} \tag{8.4.6}$$

其中

$$\widetilde{B} = Q^{-1}B, \qquad \tilde{c} = Q^{-1}c$$

这时，系统完全能控的充要条件简化为 $\widetilde{B}$ 中第一行的元素不全为零。

**单输入/单输出(SISO)系统的能控标准形**

设 SISO 定常线性系统的状态运动微分方程可表示为

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \quad x(t_0) = x_0 \\ y &= cx \end{aligned}\right\} \tag{8.4.7}$$

式中 $A$ 为 $n \times n$ 阶常数矩阵，$b$ 与 $c^{\mathrm{T}}$ 为 $n \times 1$ 阶常数列阵。设 $A$ 的特征多项式可表示为

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{8.4.8}$$

再设系统(6.4.7)能控，即有

$$\mathrm{rank}[b \ Ab \ \cdots \ A^{n-1}b] = n$$

不难验证，通过如下非奇异变换

$$x = \rho z$$

其中

$$\rho \equiv [b \ Ab \ \cdots \ A^{n-1}b]\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ a_{n-1} & \iddots & \mathbf{0} & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

$$\equiv [\rho_1 \cdots \rho_n]$$

系统(8.4.7)可化为如下**能控标准形**

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= \tilde{A}z + \tilde{b}u \\ y &= \tilde{c}z \end{aligned}\right\} \tag{8.4.9}$$

其中

$$\tilde{A} = \rho^{-1}A\rho = \left[\begin{array}{c:ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ \hdashline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{array}\right]$$

$$\tilde{b} = \rho^{-1}b = [0 \cdots 0\ 1]^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{c} = c\rho = [c\rho_1 \cdots c\rho_n] \equiv [\beta_0 \cdots \beta_{n-1}]$$

不难验证，这时有

$$\mathrm{rank}[\tilde{b}\ \tilde{A}\tilde{b} \cdots \tilde{A}^{n-1}\tilde{b}] = n$$

也就是说，非奇异相似变换不会改变系统的能控性。

3. 能测性

**能测性**标志通过系统输出（观测量）来确定系统状态的能力。若根据系统在时间区间$[t_0, t_1]$内的输出观测量以及给定允许控制$\boldsymbol{u}(t)$，能唯一确定系统在$t_0$时刻的状态$\boldsymbol{x}(t_0)$，则称此系统在$t_0$时刻是能测的。若系统在所考察的时间区间内的每个时刻都能测，则称此系统是完全能测的。

设$n$阶定常线性系统仍可由方程(6.4.4)描述。这时，系统能测的充分必要条件可表述为

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

上述$rn \times n$阶矩阵称为**能测性矩阵**。

当系统(8.4.4)中$A$可化为对角阵，即有

$$\widetilde{A} \equiv Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}[s_i]$$

且各 $s_i$ 为互异特征值时，系统可化为式(8.4.6)形式。这时，系统能测的充分必要条件简化为 $\tilde{c}$ 阵各列都是非零列向量。

**SISO 定常线性系统的能测标准形**

设系统(8.4.7)能测，则有

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

再设系统的特征多项式仍取式(8.4.8)。

通过如下非奇异变换

$$z = Tx$$

其中

$$T \equiv \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ a_{n-1} & \iddots & \mathbf{0} & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

可将系统(8.4.7)化为如下**能测标准形**

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ \hdashline & & & -a_1 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & -a_{n-1} \end{array}\right] z + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u \\ &= \widetilde{A}^{\mathrm{T}} z + \tilde{c}^{\mathrm{T}} u \\ y &= [0 \cdots 0\ 1] z = \tilde{b}^{\mathrm{T}} z \end{aligned}\right\} \qquad (8.4.10)$$

在系统能控性与能测性之间存在所谓**对偶原理**。

设原系统为如下定常线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

则与之对偶的系统定义为

$$\dot{x} = A^{T}x + C^{T}u$$
$$y = B^{T}x$$

对偶原理指出，当原系统能控时，则其对偶系统能测。反之，当原系统能测时，则其对偶系统能控。从上述 SISO 定常线性系统的能控标准形(8.4.9) 与能测标准形(8.4.10) 也不难看到这一点。

### 8.4.2　线性二次型最优控制

1. 最优控制问题

设 $\boldsymbol{x}$ 是系统的 $n$ 维状态矢量，其运动微分方程可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \tag{8.4.11}$$

式中 $\boldsymbol{f}$ 为 $n$ 维连续可微的矢量函数，$\boldsymbol{u}$ 为 $m$ 维控制矢量。在所考察的时间区间$[t_0,t_1]$上，若已知 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 与 $\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{x}_1$，则为固定端点问题。再设性能泛函为

$$J \equiv \int_{t_0}^{t_1} L[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t]\mathrm{d}t \tag{8.4.12}$$

其中 $L$ 连续可微。

这时，固定端点最优控制问题的提法为：在上述条件下，寻找最优的控制 $\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$，使 $J$ 沿相应的最优运动轨线 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 取最小值。

这一问题的解法如下：可以把式(8.4.11) 看做一种等式约束，采用 $n$ 个拉格朗日乘子来解除 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{u}$ 的约束。将式(8.4.11) 改写为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) - \dot{\boldsymbol{x}} = 0$$

引入待定的 $n$ 维矢量拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}(t)$，其为

$$\boldsymbol{\lambda}(t) \equiv [\lambda_1(t)\ \cdots\ \lambda_n(t)]^{T}$$

构作增广泛函

$$J_a \equiv \int_{t_0}^{t_1} [L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{f} - \dot{\boldsymbol{x}})]\mathrm{d}x \qquad (8.4.13)$$

当式(8.4.11)成立时，有$J = J_a$，因而求$J$的一阶变分可转化为求$J_a$的一阶变分。

引入标量**哈密顿**函数(Hamiltonian)

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},t) \equiv L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \qquad (8.4.14)$$

则式(8.4.13)可写成

$$J_a = \int_{t_0}^{t_1} [H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},t) - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}]\mathrm{d}t$$

对上式右端后面一项进行分部积分，得

$$J_a = -\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} [H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},t) + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}]\mathrm{d}t$$

当$\boldsymbol{u}$取最优控制$\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$，$\boldsymbol{x}$取最优轨线$\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$时，应有$\delta J_a = 0$。

由固定端条件，有$\delta\boldsymbol{x}(t_0) = \delta\boldsymbol{x}(t_1) = 0$，因而有

$$\delta J_a = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ (\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}})^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{x} + (\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{u} \right\}\mathrm{d}t \qquad (8.4.15)$$

若令$\delta J_a = 0$，则有

$$(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}})^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{x} + (\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{u} = 0$$

在约束解除后，且系统能控时，$\delta\boldsymbol{x}$与$\delta\boldsymbol{u}$应是任意的，因而必须有

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} \qquad (8.4.16)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = 0 \qquad (8.4.17)$$

由式(6.4.14)与式(6.4.11)，有

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \qquad (8.4.18)$$

上式称为**正则形式下的状态方程**。而拉格朗日乘子$\boldsymbol{\lambda}$也称协态变量，相应地，式(8.4.16)也称**协态方程**。状态方程(8.4.18)与协态

方程(8.4.16)合称**正则方程**。而式(8.4.17)则称为**控制方程**。

综上所述，可得如下结论：

系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$$

两端点固定，且 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1$；$\boldsymbol{u}$ 为允许控制；性能泛函取为

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L[\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t]\mathrm{d}t$$

那末，使 $J$ 达到极值的条件是对应的解 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda}$ 必须满足方程(8.4.16)～(8.4.18)以及给定的初始条件与终端条件。以上只是最优控制问题解的必要条件，因为性能指标 $J$ 究竟取极大还是极小，还需考察二阶变分 $\delta^2 J$。不过，在许多工程实际问题中，从直观的物理概念出发就可以判定性能指标 $J$ 是否取极小值。

另外，以上关于固定端点最优控制问题的讨论结果，同样适用于满足 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}(t_1) = \boldsymbol{0}, t_1 \to \infty$ 时的混合型边值最优控制问题。

2. 线性二次型问题

如果系统是线性的，而性能指标 $J$ 是状态变量和/或控制变量的二次型函数，则这样的最优控制问题称为线性二次型最优控制问题，简称线性二次型问题。

设系统的状态运动微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u} \tag{8.4.19}$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$ 与 $\boldsymbol{B}(t)$ 分别为 $n \times n$ 阶与 $n \times m$ 阶给定的函数矩阵。运动初始条件为：当 $t = t_0$ 时，有

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{8.4.20}$$

终端条件为 $t_1 \to \infty$，且 $\boldsymbol{x}(t_1)$ 不受约束，这时，性能指标可取为

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u})\mathrm{d}t \tag{8.4.21}$$

性能指标中的加权矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 通常取为对角阵。$\boldsymbol{Q}$ 阵中某个对角元素愈大，意味着相应的状态变量将愈快地趋于零。而引入 $\boldsymbol{R}$ 阵是考虑到控制作用的耗能要求。通常，$\boldsymbol{R}$ 取正定阵，$\boldsymbol{Q}$ 取非负定阵。

在这种情形下，哈密顿函数取为

$$H \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{8.4.22}$$

于是，协态方程为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \tag{8.4.23}$$

且有

$$\boldsymbol{\lambda}(t_1) = \boldsymbol{0} \tag{8.4.24}$$

而控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0} \tag{8.4.25}$$

或写成

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{8.4.26}$$

由方程(8.4.19)、(8.4.23)、(8.4.26) 连同边界条件(8.4.20)、(8.4.24)，可导出最优解 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$、$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t)$、$\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$。

当利用状态反馈来实现控制时，可设

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{8.4.27}$$

于是有

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{8.4.28}$$

将上式代入方程(8.4.19)，有

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{8.4.29}$$

式(8.4.27) 两端对 $t$ 求导数，并利用式(8.4.23)，可得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) &= \dot{\boldsymbol{K}}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{K}(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ &= -\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}$$

将式(8.4.29) 代入上式，整理后，可得

$$[\dot{\boldsymbol{K}}(t) + \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}(t)$$

$$+ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}(t) + \boldsymbol{Q}(t)]\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$$

上式对任意的 $\boldsymbol{x}(t)$ 均成立，因而有

$$\dot{\boldsymbol{K}}(t) = - \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}(t) + \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}(t) - \boldsymbol{Q}(t) \quad (8.4.30)$$

式(8.4.30)称为关于$\boldsymbol{K}(t)$的**黎卡提**(Riccati)**矩阵微分方程**，其边界条件为：当 $t = t_1$ 时，满足

$$\boldsymbol{\lambda}(t_1) = \boldsymbol{K}(t_1)\boldsymbol{x}(t_1)$$

由式(6.4.24)可知有

$$\boldsymbol{K}(t_1) = 0$$

这样，在求解黎卡提方程时，可利用 $\boldsymbol{K}(t_1)$，从 $t_1$ 开始逆时间求解。

可以证明，$\boldsymbol{K}(t)$ 是正定对称阵。

将求得的$\boldsymbol{K}(t)$代入式(8.4.27)与式(8.4.26)，可得线性最优控制律 $\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$ 为

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(t) = - \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{x}(t)$$

其中

$$\boldsymbol{G}(t) \equiv \boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}(t) \quad (8.4.31)$$

$\boldsymbol{G}$ 称为最优控制增益。

线性二次型问题最优控制框图可示为图 8.4.1。

3. 定常线性二次型问题

现讨论定常线性系统的情形，这时，系统的运动微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \quad (8.4.32)$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是常数阵。相应地，性能指标 $J$

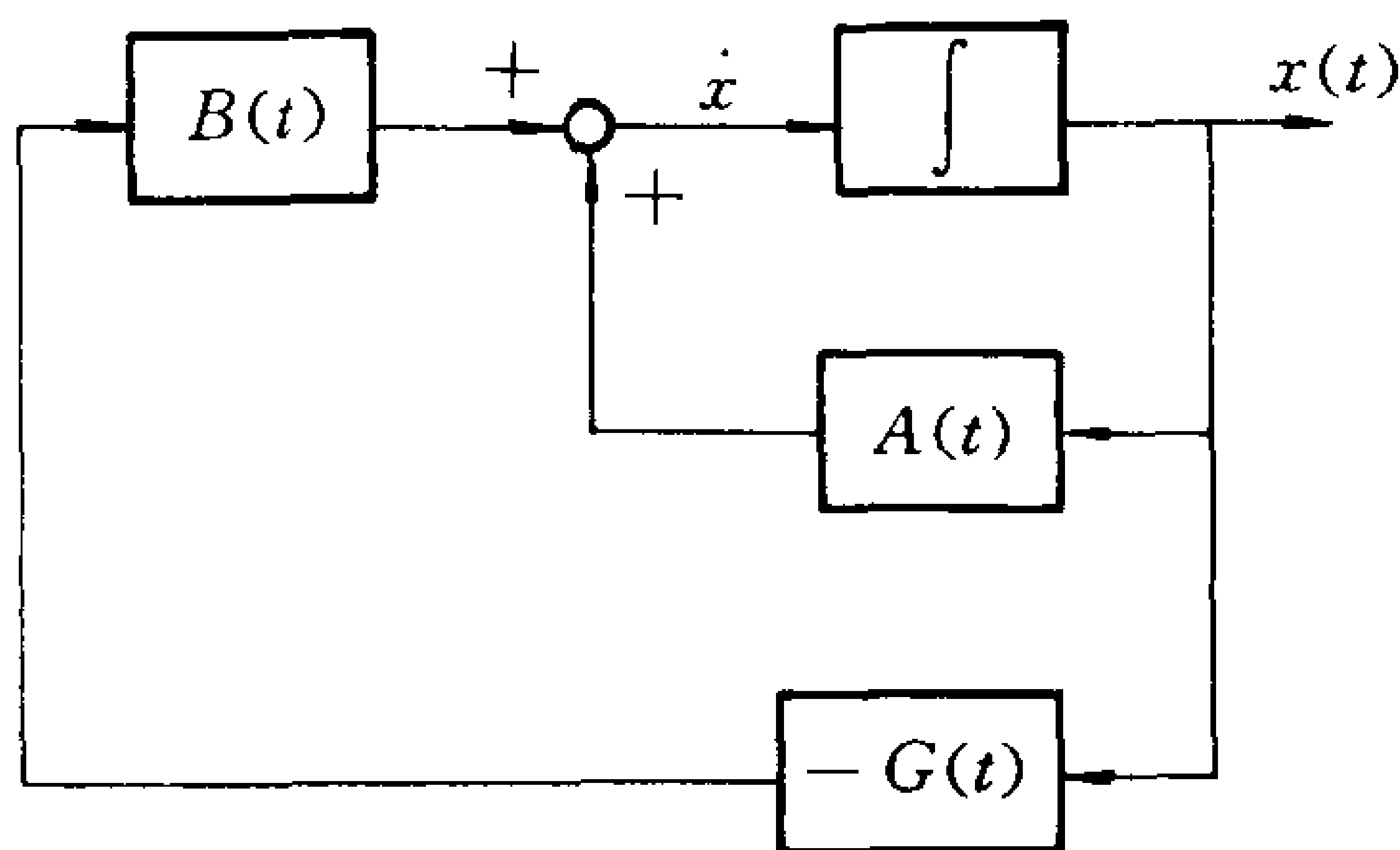



图 8.4.1 线性二次型最优控制框图

表示式(8.4.21)中的 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 也都取为常数阵。而黎卡提方程的终端条件仍为:当 $t_1 \to \infty$ 时,有 $\boldsymbol{K}(t_1)=0$。实践表明,当从 $t_1 \to \infty$ 开始逆时间积分黎卡提方程,$\boldsymbol{K}(t)$ 将迅速增大至一稳定值。换句话说,从 $t=0$ 开始,在相当长的一段时间内,$\boldsymbol{K}(t)$ 将保持为常值,即有 $\boldsymbol{K}(t)=\boldsymbol{K}(0)$,如图 8.4.2 所示。

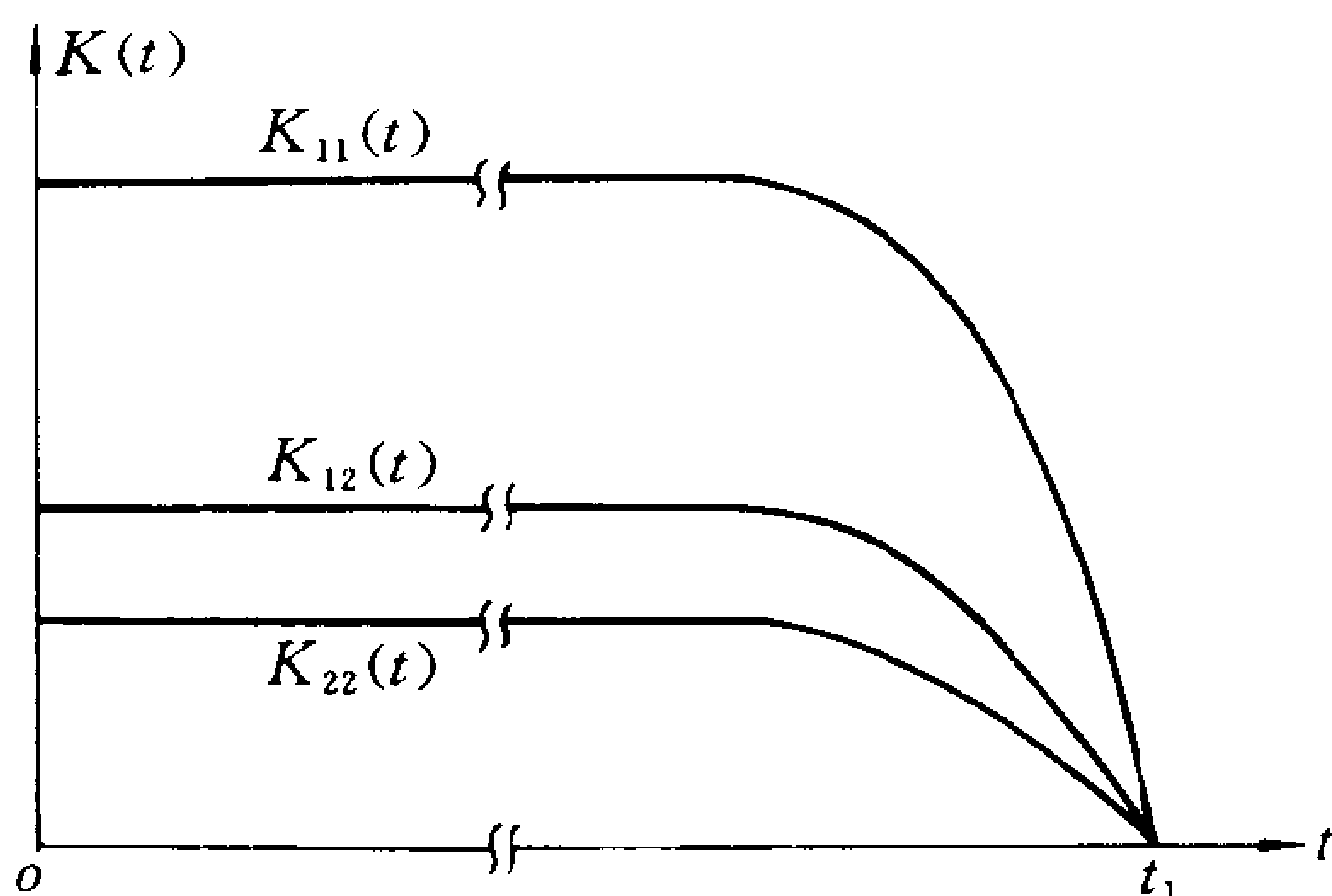



图 8.4.2 逆时间求解黎卡提方程的结果($n=2$)

因此,可以认为,在具有工程实际意义的相当长的时间区间内,有 $\dot{\boldsymbol{K}}(t)=0$。从而求解黎卡提矩阵微分方程的问题退化为求解如下**黎卡提矩阵代数方程**

$$\boldsymbol{KA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}-\boldsymbol{KBR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}-\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{0} \qquad (8.4.33)$$

在这段时间内的最优控制 $\tilde{u}(t)$ 可表示为

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Kx}(t)\equiv-\boldsymbol{G}x$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足如下定常线性齐次方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BG}]\boldsymbol{x}(t) \qquad (8.4.34)$$

以及相应的初始条件:$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}$。

不难看到,上述最优状态反馈控制实际上起了系统特征矩阵极点重新配置的作用。即系统由无控制作用时(开环系统)的特征矩阵($\boldsymbol{SI}-\boldsymbol{A}$)转化为有控制作用时(闭环系统)的特征矩阵($\boldsymbol{SI}-$

$A+BG$)。

作为小结,将定常线性二次型最优控制的基本结果归纳如下:

设定常线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

是能控与能测的,则使下述性能指标

$$J=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}t$$

取极小值的最优控制律为全状态负反馈,即

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)\equiv-\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(t)$$

$\boldsymbol{G}\equiv\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}$ 称为反馈增益,其中 $\boldsymbol{K}$ 满足黎卡提矩阵代数方程。而且上述最优闭环控制系统是渐近稳定的。

### 8.4.3　状态重构

上述最优反馈控制是通过全状态反馈来实现的。当系统状态变量不能全部获得时就实现不了。在系统能测的情形下,可以通过观测得到的信息来重构(或估计)系统的状态量。所谓观测器(也称状态估计器)就是为此设计的。不过重构所得的状态量仅仅是一种估计值。

龙伯格(Luenberger)估计器的设计思想是用输出估计的误差反馈来控制状态估计的误差。考察如下定常线性系统 $S$,它可描述为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\\&\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{aligned}\right\}\tag{8.4.35}$$

首先假设估计器 $S_0$ 在开环情形下与系统 $S$ 服从相同的运动规律,从而有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\quad \hat{x}(0)=\hat{x}_0\\&\hat{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}\end{aligned}\right\}\tag{8.4.36}$$

这时，$S$ 与 $S_0$ 二者的状态误差 $\boldsymbol{z} \equiv \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$ 将满足如下方程

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{x}_0 - \hat{\boldsymbol{x}}_0$$

因而，$\boldsymbol{z}$ 的解为

$$\boldsymbol{z}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{z}(0)$$

其中初始状态的估计误差 $\boldsymbol{z}(0)$ 是无法避免的，而 $\boldsymbol{z}(t)$ 是否衰减以及衰减的快慢则取决于系统矩阵 $\boldsymbol{A}$。利用实际输出与估计输出之差进行反馈控制，来改进估计器的系统矩阵，这样做有可能加快 $\boldsymbol{z}(t)$ 的衰减。

记实际输出为 $\boldsymbol{y}$，估计输出为 $\hat{\boldsymbol{y}}$；二者之差 $\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})$。设估计器的反馈增益阵取为 $\boldsymbol{L}$，这时，闭环估计器的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}), \quad \hat{\boldsymbol{x}}(0) = \hat{\boldsymbol{x}}_0$$

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}$$

以上二式可合并为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{8.4.37}$$

可见，经反馈修正后，闭环估计器的系统矩阵已变为$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})$。

由式(8.4.35)与(8.4.37)，状态估计误差 $\boldsymbol{z}$ 将满足如下方程

$$\dot{\boldsymbol{z}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{x}_0 - \hat{\boldsymbol{x}}_0$$

它的解将为

$$\boldsymbol{z}(t) = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})t}\boldsymbol{z}(0)$$

于是，问题归结为适当地选取增益阵 $\boldsymbol{L}$，满足：(1) 估计器闭环系统是渐近稳定的；(2) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}$ 阵的特征值(极点)配置使状态估计误差有足够快的衰减率。以上两点都导致下一小节要讨论的极点配置问题。

值得一提的是，利用全状态反馈的最优控制系统本身就有极点配置问题，而状态估计器设计又有极点配置问题。那末，在利用

状态估计器来实现闭环最优控制的系统设计中，这样两种极点配置是否会相互影响呢？闭环控制系统的特征值分离定理回答了这一问题。

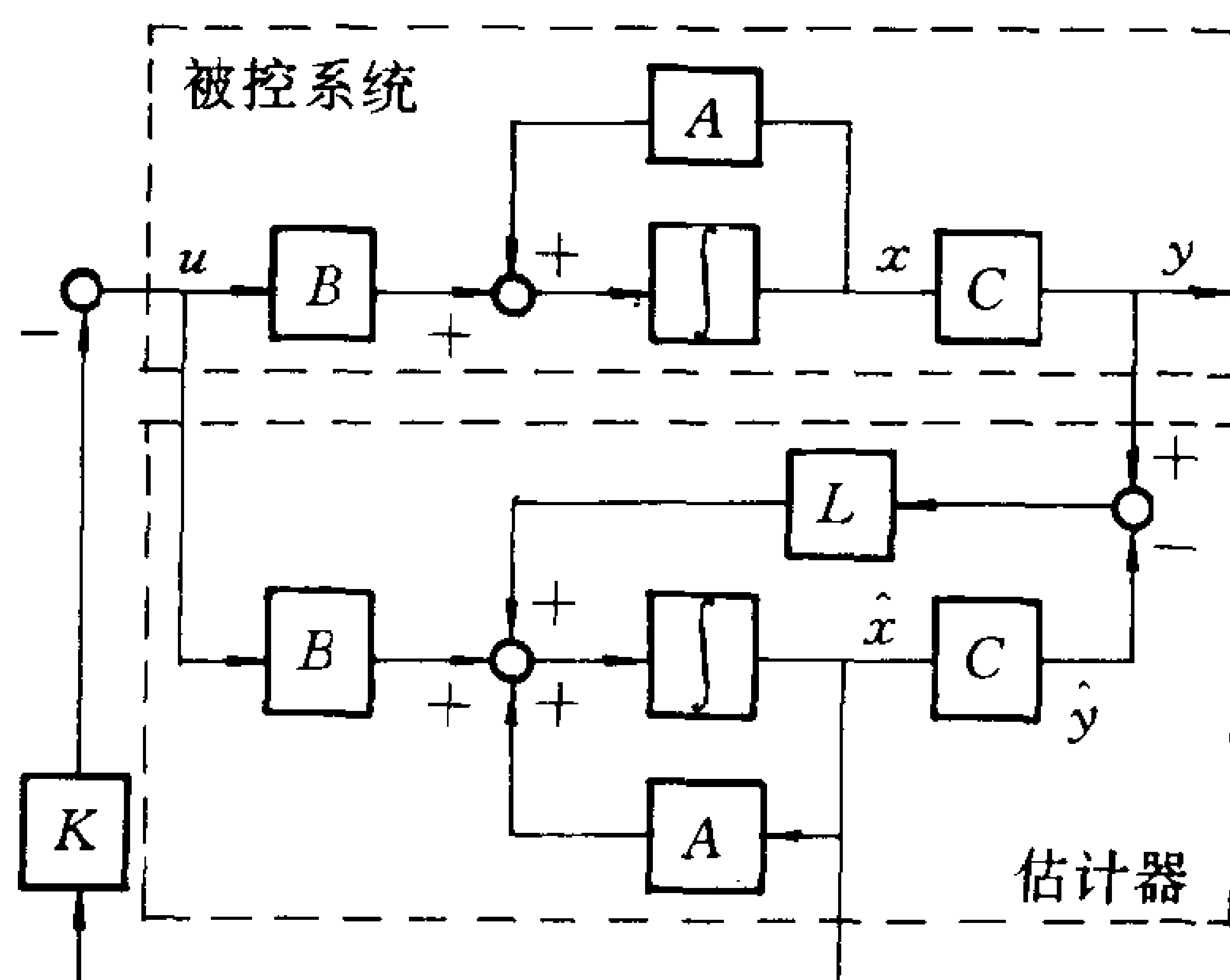



图 8.4.3　状态估计反馈闭环控制系统

考察图 8.4.3 所示由受控系统与状态估计器组成的闭环控制系统。设按真实状态反馈形成的闭环控制系统的特征多项式为 $\Delta_1(s) = |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}|$，又闭环状态估计器的特征多项式为 $\Delta_2(s) = |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{LC}|$，**分离定理**指出：按估计状态反馈形成的总的闭环控制系统的特征多项式则为 $\Delta(s) = \Delta_1(s)\Delta_2(s)$，即有

$$\Delta(s) = |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}|\,|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{LC}|$$

这样就保证了上述两种极点配置可以分别独立地进行设计。

当系统中部分状态变量可直接通过测量得到时，例如 $n$ 个状态变量中有 $r$ 个可直接测得，则可以根据类似的思路设计降维（例如 $n - r$ 维）估计器。

还需要指出的是，以上讨论中都没有考虑系统中实际存在的输入噪声与测量噪声的影响。当考虑噪声的影响时，需要用到卡尔

曼(Kalman)与布西(Bucy)的滤波理论。这已经超出本书的讨论范围,请参阅有关现代控制理论的专著。

### 8.4.4 极点配置

上小节在讨论状态估计器设计时已提到极点配置问题。其实,反馈控制实质上就是对系统的极点进行重新调整。由于系统的动态特性主要取决于其特征值与特征矢量,因此,若控制了系统的特征值(极点)也就在很大程度上控制了系统的动态特性。

本小节用SISO系统来说明极点配置的基本设想。

设SISO反馈控制系统可描述为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \\ y &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}\end{aligned}\right\} \tag{8.4.38}$$

其中$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$分别为$n \times n$、$n \times 1$、$1 \times n$阶常数矩阵。再设系统是状态能控的。引入如下状态反馈控制。

$$u(t) = r(t) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) \tag{8.4.39}$$

其中$r(t)$为纯量函数,$\boldsymbol{K}$为$1 \times n$阶常数行阵。这时,可以按任意指定的要求来配置闭环系统的特征值。

设系统(8.4.38)中开环系统的特征多项式为

$$\Delta(s) = |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{8.4.40}$$

而相应闭环系统期望的特征多项式为

$$\Delta^*(s) = s^n + a_{n-1}^*s^{n-1} + \cdots + a_0^* \tag{8.4.41}$$

其中各个系数$a_i^*$由期望的特征值确定。

将式(8.4.39)代入式(8.4.38),可得闭环系统的状态系数矩阵为$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{K})$。于是,问题归结为如何确定$\boldsymbol{K}$阵,使特征多项式满足指定的要求。

注意,非奇异相似变换并不改变系统的特征多项式。为了叙述简明,我们将从状态能控标准型出发进行讨论。设系统(8.4.38)可通过非奇异变换$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{z}$转化为

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= \widetilde{A}z + \widetilde{b}u \\ y &= \widetilde{c}z \end{aligned}\right\} \tag{8.4.42}$$

其中

$$\widetilde{A} = \rho^{-1}A\rho = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_0 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{8.4.43}$$

$$\widetilde{b} = \rho^{-1}b = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]^{\mathrm{T}} \tag{8.4.44}$$

$$\widetilde{c} = c\rho = [\beta_0 \ \cdots \ \beta_{n-1}] \tag{8.4.45}$$

相应地，式(6.4.39)化为

$$u = r - \widetilde{K}z \tag{8.4.46}$$

其中

$$\widetilde{K} = K\rho$$

将式(8.4.46)代入式(8.4.42)，有

$$\dot{z} = (\widetilde{A} - \widetilde{b}\widetilde{K})z + \widetilde{b} \tag{8.4.47}$$

若记 $\widetilde{K} = [k_0 \cdots k_{n-1}]$，注意到式(8.4.43)与式(8.4.44)的特殊形式，闭环系统的状态系数矩阵可表示为

$$\widetilde{A} - \widetilde{b}\widetilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -(a_0 + k_0) & \cdots & & -(a_{n-1} + k_{n-1}) \end{bmatrix}$$

由此可直接写出闭环系统的特征多项式

$$|sI - (\widetilde{A} - \widetilde{b}\widetilde{K})| = s^n + (a_{n-1} + k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 + k_1)s + (a_0 + k_0) \tag{8.4.48}$$

比较式(8.4.48)与式(8.4.41)，可知只要令

$$a_i + k_i = a_i^*, \quad i = 0,1,\cdots,n-1 \tag{8.4.49}$$

就可以使闭环系统的极点配置到预期的位置上。

以上讨论中，并未涉及输出变量的个数，因此，这一做法也适用于 SIMO 情形。至于 MIMO 系统，原则上也可以实现极点配置，和 SISO 系统不同之处在于满足指定极点配置要求的状态反馈矩阵一般不唯一。这样就有更多的自由选择来设计反馈控制，使得不仅能满足极点分布的要求，而且能满足其它性能要求，诸如特征矢量配置、零点分布等。当然，在确定反馈控制矩阵时计算工作要复杂一些。

前已指出，极点配置法的应用不限于状态估计器设计。事实上，多自由度振动系统的动态响应与稳定性在很大程度上取决于个别或少数振动模态的响应与稳定裕度。因此，系统的振动控制同样可以利用极点配置来实现，也就是利用状态反馈来改变系统的模态结构(特征值与特征矢量)，使得原来处于“临界”情形下的模态的稳定裕度有所改善，或者使原来对系统响应有特大贡献的模态振动得到抑制。这样，直接应用极点配置法来控制系统振动时，必须事先对原系统进行仔细的振动分析，找出隐患所在，然后有针对性地提出极点重新配置的合理要求。

### 8.4.5 一类经常性外扰作用下系统的最优控制

8.4.2 节是在没有外扰(除控制作用外)的前提下，导出系统的最优控制律的。而振动工程中往往还需要考察系统受经常性外扰作用的情形。

设定常线性系统受到正比于某个纯量函数 $w(t)$ 的经常性外扰作用。$w(t)$ 满足初始条件 $w(0)=0$，且满足如下线性微分方程

$$\frac{d^{\rho} w}{dt^{\rho}} + g_{\rho}\frac{d^{\rho-1}w}{dt^{\rho-1}} + \cdots + g_2 \dot{w} + g_1 = 0 \qquad (8.4.50)$$

其中 $g_1,\cdots,g_{\rho}$ 是给定的常数。同时，对系统加上正比于某个纯量函数 $u(t)$ 的控制，且设 $u(t)$ 满足如下初始条件

$$u(0)=u_0,\quad \left.\frac{d^r u}{dt^r}\right|_{t=0} = u_{0r},\quad r=1,\cdots,\rho-1 \qquad (8.4.51)$$

式中 $u_0, u_{01}, \cdots, u_{0(p-1)}$ 都是给定的常数。

这时，设定常线性系统的状态运动微分方程可描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u(t) + \boldsymbol{f}w(t) \tag{8.4.52}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $n \times n$ 阶系统矩阵，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 为 $n \times 1$ 阶常数列阵。再设状态的初始与边界条件为

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \qquad \| \boldsymbol{x}_0 \| < \infty \tag{8.4.53}$$

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t) = \lim_{t\to\infty}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{0} \tag{8.4.54}$$

于是，最优控制问题可提为：寻找最优控制 $\tilde{u}(t), 0 \leqslant t < \infty$，使下列性能指标 $J$ 取极小值。

$$J = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^T [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \Phi(u, \dot{u}, \cdots]\mathrm{d}t \tag{8.4.55}$$

式中，纯量函数 $\Phi(u, \dot{u}, \cdots)$ 对应于控制所需的能量，$\boldsymbol{Q}$ 是 $n \times n$ 阶对称正定实数矩阵。

在无外扰作用($w(t) = 0$) 的情形下，函数 $\Phi$ 通常取为

$$\Phi = r^2 u^2$$

其中 $r$ 是实常数。可是，当 $w(t)$ 是时间函数时，这种取法将不能满足式(8.4.54) 的要求。在 $w(t)$ 取形式如式(8.4.50) 的情形下，可以取

$$\Phi = r^2\left(\frac{\mathrm{d}^p u}{\mathrm{d}t^p} + g_p \frac{\mathrm{d}^{p-1}u}{\mathrm{d}t^{p-1}} + \cdots + g_2\dot{u} + g_1\right)^2 \tag{8.4.56}$$

这时，可以通过系统扩阶，将问题归结为无外扰作用的情形。

首先取列阵 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{f}$ 成比例，即设

$$\boldsymbol{f} = \alpha\boldsymbol{b} \tag{8.4.57}$$

其中 $\alpha$ 是非零实常数。再设系统($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$) 满足能控性条件。不失一般性，系统($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{f}$) 可取为如下能控标准形

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 = \left[\begin{array}{c|ccc} \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{I}_{n-1} & \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_0 = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}_0=\alpha\boldsymbol{b}_0$$

然后定义 $\rho$ 个辅助状态变量

$$x_{n+1}=u+\alpha w$$
$$x_{n+i}=\frac{\mathrm{d}^{i-1}u}{\mathrm{d}t^{i-1}}+\alpha\frac{\mathrm{d}^{i-1}w}{\mathrm{d}t^{i-1}},\quad i=2,\cdots,\rho$$

于是有

$$\dot{x}_{n+i}=x_{n+i+\rho},\quad i=1,\cdots,\rho-1$$
$$\dot{x}_{n+\rho}=\frac{\mathrm{d}^{\rho}u}{\mathrm{d}t^{\rho}}+\alpha\frac{\mathrm{d}^{\rho}w}{\mathrm{d}t^{\rho}} \tag{8.4.58}$$

再定义新的控制变量 $v(t)$ 为

$$v=\frac{\mathrm{d}^{\rho}u}{\mathrm{d}t^{\rho}}+g_{\rho}\frac{\mathrm{d}^{\rho-1}u}{\mathrm{d}t^{\rho-1}}+\cdots+g_2\dot{u}+g_1u \tag{8.4.59}$$

这样，考虑到式(6.4.58)与式(6.4.50)，有

$$\dot{x}_{n+\rho}=-g_1x_{n+1}-g_2x_{n+2}-\cdots-g_{\rho}x_{n+\rho}+v \tag{8.4.58a}$$

现取扩阶系统的状态变量为

$$\boldsymbol{z}=[x_1\ \cdots\ x_{n+\rho}]^{\mathrm{T}}$$

于是，扩阶系统的最优控制问题可表示为

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{z}+\widetilde{\boldsymbol{b}}v \tag{8.4.60}$$

且有

$$\boldsymbol{z}(0)=\boldsymbol{z}_0 \tag{8.4.60a}$$
$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{0} \tag{8.4.60b}$$

式中

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_0 & [\boldsymbol{b}_0\mid\boldsymbol{0}]\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & & \boldsymbol{I}_{\rho-1} & \\ -g_1 & -g_2 & \cdots & -g_{\rho}\end{bmatrix}_{\rho\times\rho}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{b}}=[0\ \cdots\ 0\ 1]^{\mathrm{T}}$$

而性能指标 $J$ 转化为

$$J=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^T[\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{z}+r^2v^2]\mathrm{d}t \tag{8.4.61}$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{(n+\rho)\times(n+\rho)}$$

这样，原来在经常性外扰作用下，且由式(8.4.50)～(8.4.55)所表述的最优控制问题，通过引入新的控制变量表示和系统扩阶后，已经归结为常规的(无经常外扰作用的)线性二次型最优控制问题，因而可以利用8.4.2节中已得的最优控制律，将本问题中最优控制 $\widetilde{v}(t)$ 取为

$$\widetilde{v}(z) = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}z \tag{8.4.62}$$

其中

$$\boldsymbol{G} = -r^2\boldsymbol{K}\widetilde{\boldsymbol{b}}$$

而 $\boldsymbol{K}$ 是 $(n+\rho)\times(n+\rho)$ 阶正定对称阵，满足黎卡提矩阵代数方程

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}\widetilde{\boldsymbol{A}} - r^{-2}\boldsymbol{K}\widetilde{\boldsymbol{b}}\widetilde{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} + \widetilde{\boldsymbol{Q}} = 0 \tag{8.4.63}$$

原来系统的最优控制 $\widetilde{u}(t)$ 可由 $\widetilde{v}(z)$ 导出。最终可得

$$\widetilde{u}(t) = \boldsymbol{d}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t) \tag{8.4.64}$$

其中

$$\boldsymbol{d}_0 = [1\ 0\ \cdots\ 0]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1\ \cdots\ \lambda_n]^{\mathrm{T}}$$

而矢量 $\boldsymbol{y} \equiv [y_1\ \cdots\ y_\rho]^{\mathrm{T}} = [x_{n+1}\ \cdots\ x_{n+\rho}]^{\mathrm{T}}$，它是辅助线性系统的状态矢量，满足如下微分方程

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{D}_0\boldsymbol{y} + \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{x} \tag{8.4.65}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_0 = \left[\begin{array}{c:c} -g_\rho & \\ & \boldsymbol{I}_{\rho-1} \\ \vdots & \\ \hdashline -g_1 & \boldsymbol{0} \end{array}\right]_{\rho\times\rho}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \mathbf{0} \\ \alpha_\rho & \vdots & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_\rho \\ \vdots \\ g_1 \end{bmatrix} \lambda^{\mathrm{T}}$$

式中 $\alpha_i(i=1,\cdots,\rho)$ 与 $\lambda_j(j=1,\cdots,n)$ 可由矩阵 $A$ 与 $G$ 中的各个元素线性表出①。

上述最优控制系统的方框图如图 8.4.4 所示。

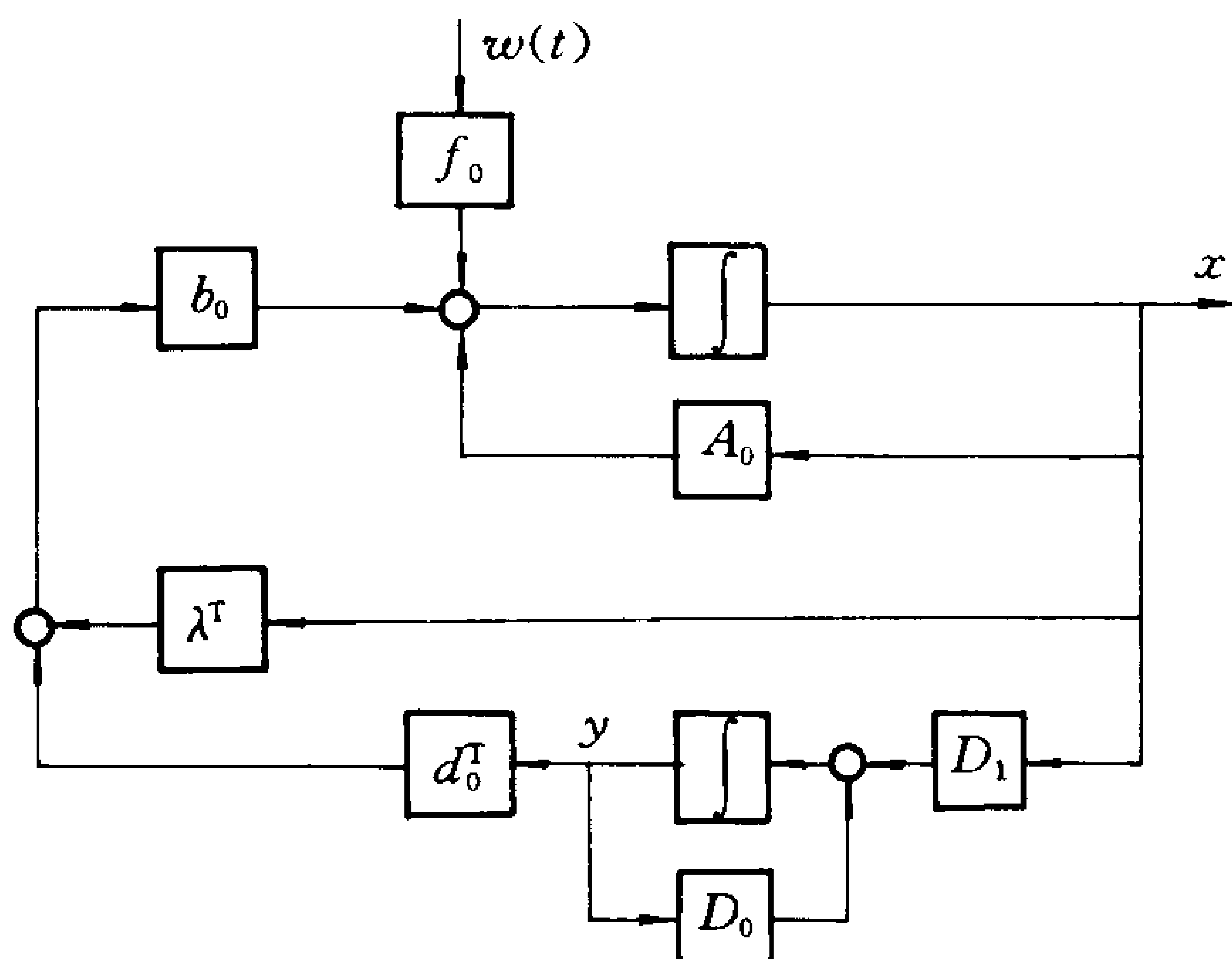



图 8.4.4 经常性外扰下最优系统方框图

现将上述最优控制理论应用于单自由度弹簧质量系统的受迫振动控制。

无阻尼单自由度弹簧($K$)质量($M$)线性系统，其受迫振动微分方程可描述为

① Johnson C D. Further study of the linear regulator with distrubances. IEEE Transactions on Automatic Control, 1970, 4: 222 ~ 228

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t)$$

从而有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

再设外扰 $w(t)$ 满足如下微分方程

$$\ddot{w} + g_1 w = 0, \quad g_1 = K/M$$

与式(8.4.55)相应的性能指标 $J$ 中的加权矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 取为单位阵，与式(8.4.57)相应的 $\alpha$ 取为 1。

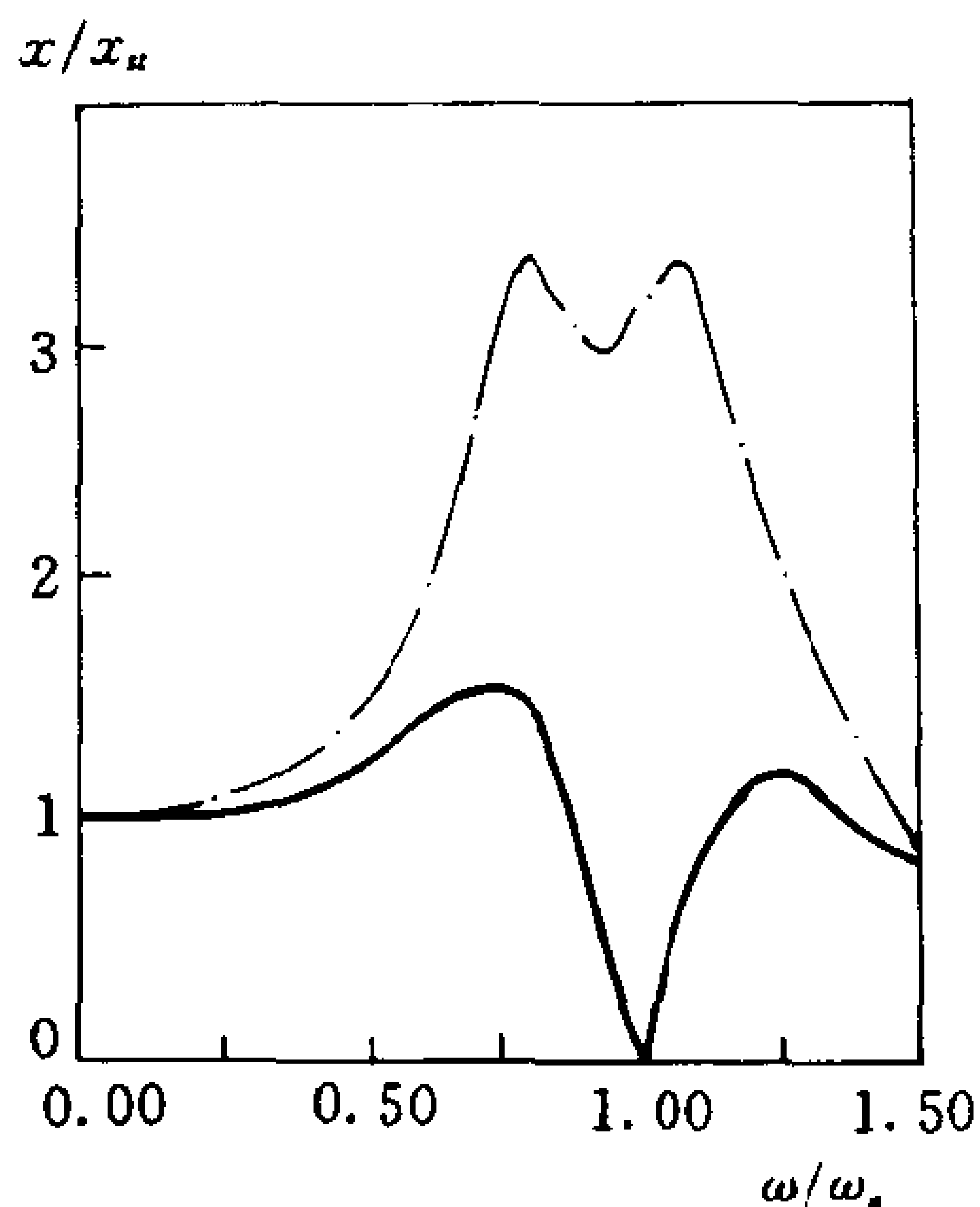



图 8.4.5　主、被动振动控制下的响应放大率

具体计算中，控制律是按激振频率等于系统固有频率时设计的。目的是要完全抑制在共振状态下的稳态响应。这样，在其它激励频率下系统的稳态响应就得不到完全抑制。计算所得闭环控制系统的频响函数如图 8.4.5 所示。正如预期那样，当 $\omega = \sqrt{K/M}$ 时，系统的共振响应得到了完全抑制，如图 8.4.6 所示。但在其它激励频率处，系统的稳态响应并不为零。为了便于比较，图 8.4.5

中还用虚线画出了对应于装有经优化调谐设计的被动式动力吸振器时系统的频响曲线。吸振器的质量 $m$、弹簧 $k$ 与阻尼 $c$ 是按最优参数设计的，并对应于吸振质量比 $\mu = m/M = 0.2$。该 $\mu$ 值是实用中常取的值。

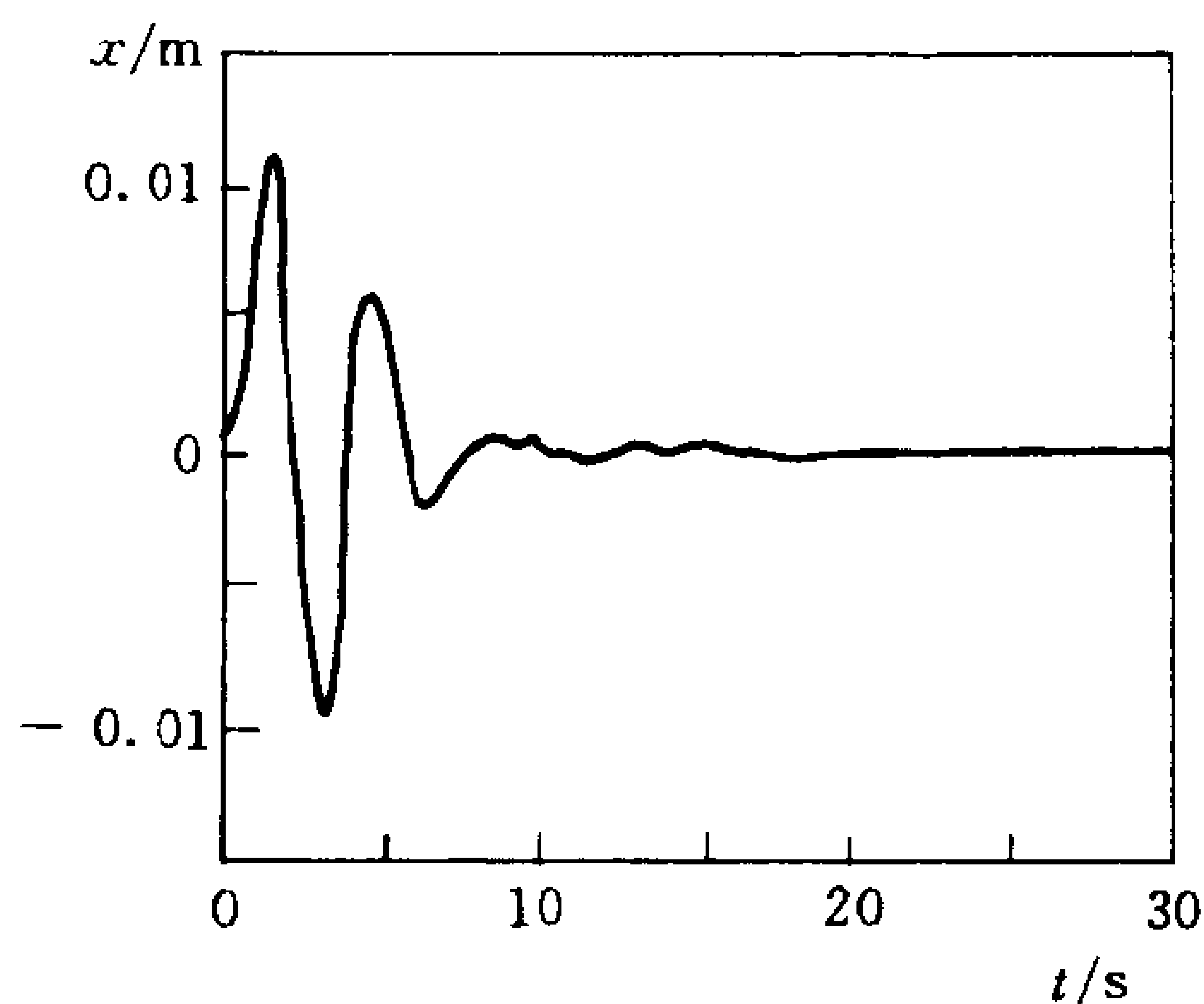



图 8.4.6 共振情形下响应的时间历程

尽管在采用主动式抑振控制的情形下，最大的放大率仍可达到 1.5 之多，但从图 8.4.5 可以看到，主动抑振的效果仍然远远优于被动式动力吸振的效果。因此，为采用主动振动控制所付出的代价还是值得的。

# 附　录

## 附录A　傅里叶变换

### A.1　傅里叶变换的基本性质

设 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的傅里叶变换为 $X(\omega)$ 与 $Y(\omega)$，则有

(1) 线性：$\mathscr{F}(ax+by)=aX(\omega)+bY(\omega)$

(2) 翻转：$\mathscr{F}[x(-t)]=X(-\omega)$

(3) 共轭：$\mathscr{F}[\overline{x}(t)]=\overline{X}(-\omega)$

(4) 时移：$\mathscr{F}[x(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}F(\omega)$

(5) 频移：$\mathscr{F}[x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}]=F(\omega-\Omega)$

(6) 卷积定理：记 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的卷积积分为

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

则有

$$\mathscr{F}[x(t)*y(t)]=X(\omega)Y(\omega)$$

**证**　由傅里叶变换的定义，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[x(t)*y(t)]&=\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau\Big]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\Big[\int_{-\infty}^{\infty}y(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\Big]\mathrm{d}\tau\\&=Y(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=X(\omega)Y(\omega)\end{aligned}$$

(7) 帕塞瓦尔(Parsevel)定理：

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

其物理意义为信号在时域的总能量等于它在频域的总能量。

**证**　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\Big[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\Big]\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)[x(t)e^{j\omega t}dt]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\overline{X}(\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

## A.2 δ函数的傅里叶变换

δ函数是一种广义函数，通常定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0)$$

其中 $f(t)$ 是在原点连续的任意函数。另一方面，δ函数也可以看做是一些非广义函数序列的极限情形。例如有

$$\delta(t) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{\sin\omega t}{\pi t}$$

或写成

$$\delta(\omega) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sin\omega t}{\pi\omega}$$

利用这一结果，可以证明，存在下列傅里叶变换对

$$1(t) \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

事实上，正变换由定义，有

$$\mathscr{F}[1(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}dt = 2\int_{0}^{\infty} \cos\omega t dt$$

$$= 2\pi \lim_{t\to\infty} \frac{\sin\omega t}{\pi\omega} = 2\pi\delta(\omega)$$

反之，反变换有

$$\mathscr{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = e^{jt\times 0} = 1$$

类似地，可以证明有下列傅里叶变换对

$$\delta(t) \leftrightarrow 1(\omega)$$

$$e^{j\Omega t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \Omega)$$

δ函数在傅里叶变换理论及其应用中有重要作用，它有效地

扩展了傅里叶变换的适用范围。

## A.3　傅里叶变换对简表(表 A.3)

表 A.3　傅里叶变换对简表

| 序号 | $f(t)$ | $F(\omega)$ |
|---|---|---|
| 1 | $\delta(t)$ | $1$ |
| 2 | $1$ | $2\pi\delta(\omega)$ |
| 3 | $u(t)$ | $\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$ |
| 4 | $\cos\Omega t$ | $\pi[\delta(\omega+\Omega)+\delta(\omega-\Omega)]$ |
| 5 | $\sin\Omega t$ | $j\pi[\delta(\omega+\Omega)-\delta(\omega-\Omega)]$ |
| 6 | $e^{j\Omega t}$ | $2\pi\delta(\omega-\Omega)$ |
| 7 | 矩形单脉冲 $=\begin{cases}A, \lvert t\rvert<T, A>0\\0, \lvert t\rvert>T\end{cases}$ | $2AT\frac{\sin\omega T}{\omega T}$ |
| 8 | 指数衰减函数 $=\begin{cases}e^{-\beta t}, & t>0, \quad \beta>0\\0, & t<0\end{cases}$ | $\frac{1}{\beta+j\omega}$ |
| 9 | 三角形脉冲 $=\begin{cases}A-\frac{A}{T}\lvert t\rvert, \lvert t\rvert<T, A>0\\0, \quad \lvert t\rvert>T\end{cases}$ | $\frac{2A}{\omega^2 T}(1-\cos\omega t)$ |
| 10 | 周期函数(周期为 $T$) $=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\Omega t}, \quad \Omega=\frac{2\pi}{T}$ | $2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\delta(\omega-n\Omega)$ |

# 附录B 拉普拉斯变换

## B.1 拉普拉斯变换的性质

设 $x(t)$ 的拉普拉斯变换为 $X(s)$，$y(t)$ 的拉普拉斯变换为 $Y(s)$，则有

(1) $\mathscr{L}[ax(t)] = aX(s)$

(2) $\mathscr{L}[ax(t) + by(t)] = aX(s) + bY(s)$

(3) $\mathscr{L}[x(t) * y(t)] = X(s)Y(s)$

其中

$$x(t) * y(t) = \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t x(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau$$

称为 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的卷积。

## B.2 拉普拉斯变换基本公式表(表B.2)

表B.2 拉普拉斯变换基本公式表

| 序号 | 原　函　数 | 象　函　数 |
|---|---|---|
| | $x(t)$ | $X(s)$ |
| 1 | $x(at)$ | $\frac{1}{a}X(\frac{s}{a})$ |
| 2 | $u(t-\tau)x(t-\tau)$ （时移） | $\mathrm{e}^{-\tau s}X(s)$ |
| 3 | $\mathrm{e}^{at}x(t)$ | $X(s-a)$ （$s$ 移） |
| 4 | $t^n x(t)$ | $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}X(s)$ |
| 5 | $x'(t)$ | $sX(s) - x(0)$ |
| 6 | $x^{(n)}(t)$ （$n$ 阶导数） | $s^n X(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1}x^{(r)}(0)$ |
| 7 | $\int_0^t x(u)\mathrm{d}u$ | $\frac{X(x)}{s}$ |
| 8 | $\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{n} x(u)(\mathrm{d}u)^n$（$n$ 重积分） | $\frac{X(s)}{s^n}$ |

## B.3　拉普拉斯变换对表(表 B.3)

表 B.3　拉普拉斯变换对表

| 序号 | $x(t)$ | $X(s)$ |
|---|---|---|
| 1 | $\delta(t)$ | $1$ |
| 2 | $u(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| 3 | $t^n,\ n=1,2,\cdots$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| 4 | $e^{-\omega t}$ | $\frac{1}{s+\omega}$ |
| 5 | $te^{-\omega t}$ | $\frac{1}{(s+\omega)^2}$ |
| 6 | $\cos\omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| 7 | $\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| 8 | $\mathrm{ch}\omega t$ | $\frac{s}{s^2-\omega^2}$ |
| 9 | $\mathrm{sh}\omega t$ | $\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$ |
| 10 | $1-e^{-\omega t}$ | $\frac{\omega}{s(s+\omega)}$ |
| 11 | $1-\cos\omega t$ | $\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$ |

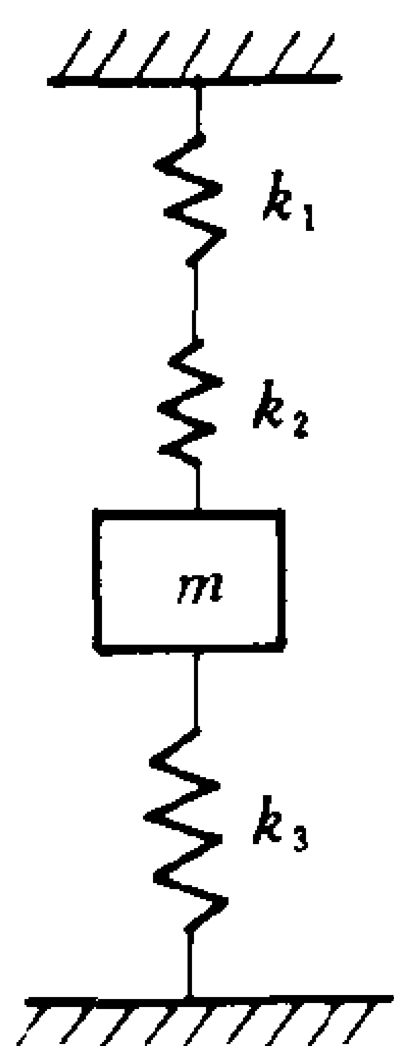
续 表

| 序号 | $x(t)$ | $X(s)$ |
|---|---|---|
| 12 | $\omega t - \sin\omega t$ | $\dfrac{\omega^3}{s^2(s^2+\omega^2)}$ |
| 13 | $\omega t\cos\omega t$ | $\dfrac{\omega(s^2-\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^2}$ |
| 14 | $\omega t\sin\omega t$ | $\dfrac{2\omega^2 s}{(s^2+\omega^2)^2}$ |
| 15 | $\dfrac{1}{\eta\omega}e^{-\zeta\omega t}\sin\eta\omega t,\quad \eta=\sqrt{1-\zeta^2}$ | $\dfrac{1}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}$ |
| 16 | $e^{-\zeta\omega t}(\cos\eta\omega t+\dfrac{\zeta}{\eta}\sin\eta\omega t),\quad \eta=\sqrt{1-\zeta^2}$ | $\dfrac{s+2\zeta\omega}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}$ |

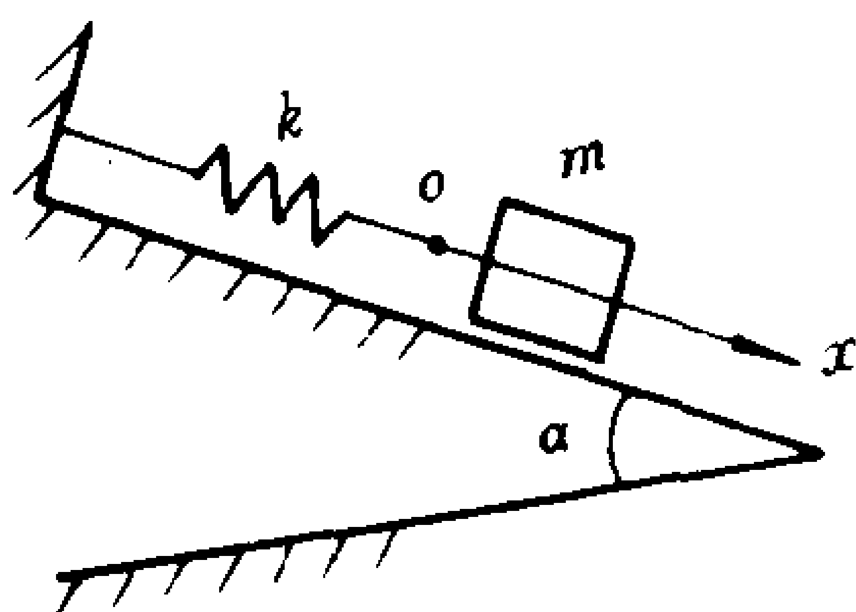
# 习　题

**2.1**　求图示物块 $m$ 的振动周期。设 $k_2 = 2k_1, k_3 = 3k_1$。

**答**　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{11k_1}}$




题图　2.1




题图　2.2

**2.2**　求图示物体沿光滑斜面振动的运动规律。已知：$\alpha = 30°$，$mg = 9.8$ N，$k = 49$ N/cm，开始运动时，弹簧无伸长，物体速度为零。

**答**　$x = -0.1\cos 70t$ cm

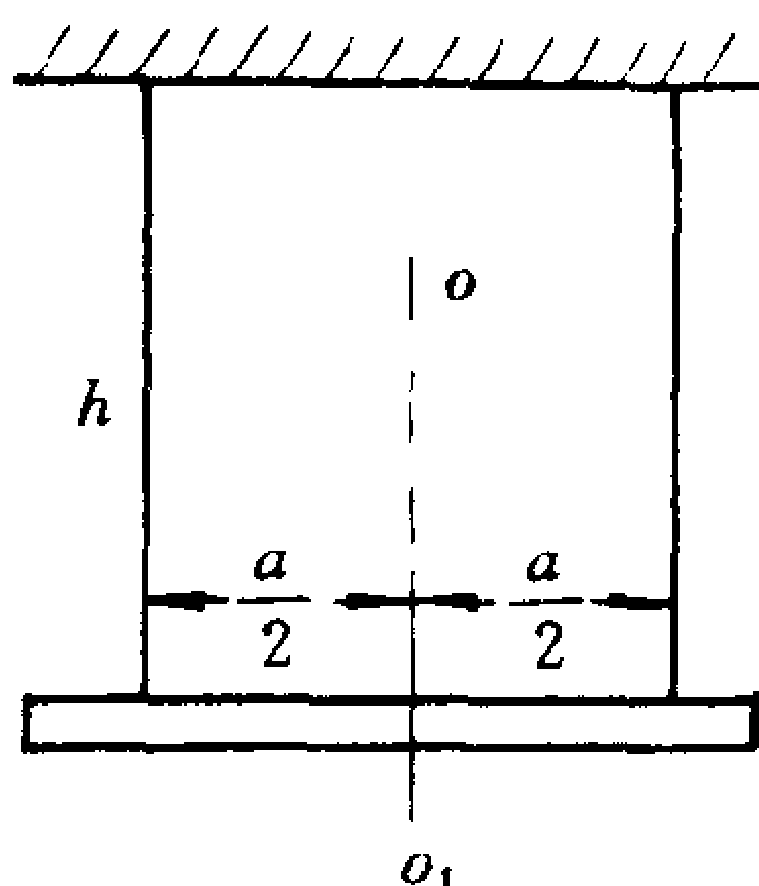
**2.3**　一均质细直杆，长为 $L$，重为 $G$，用两根长为 $h$ 的铅直线挂成水平位置，试求此杆绕铅直轴 $oo_1$ 微幅振动的周期。

**答**　$T = 2\pi \dfrac{L}{a}\sqrt{\dfrac{h}{3g}}$

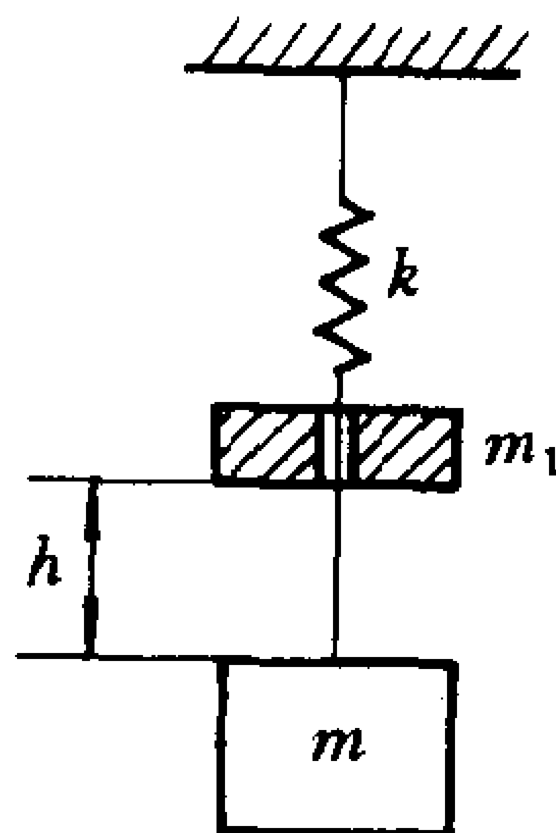
**2.4**　用弹簧悬挂的物体，质量为 $m$，原为静平衡，突然有质

量为 $m_1$ 的物体从高度 $h$ 落下，撞到 $m$ 后不再回跳，求此后的运动。

答 $$x = m_1\sqrt{\frac{2gh}{k(m+m_1)}}\sin\sqrt{\frac{k}{m+m_1}}t - \frac{m_1 g}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m+m_1}}t$$




题图 2.3




题图 2.4

**2.5** 半径为 $r$ 的均质圆柱，可在半径为 $R$ 的圆筒内作纯滚动。圆柱和圆筒的轴线都成水平，试求圆柱在静平衡位置附近作微振动的频率。

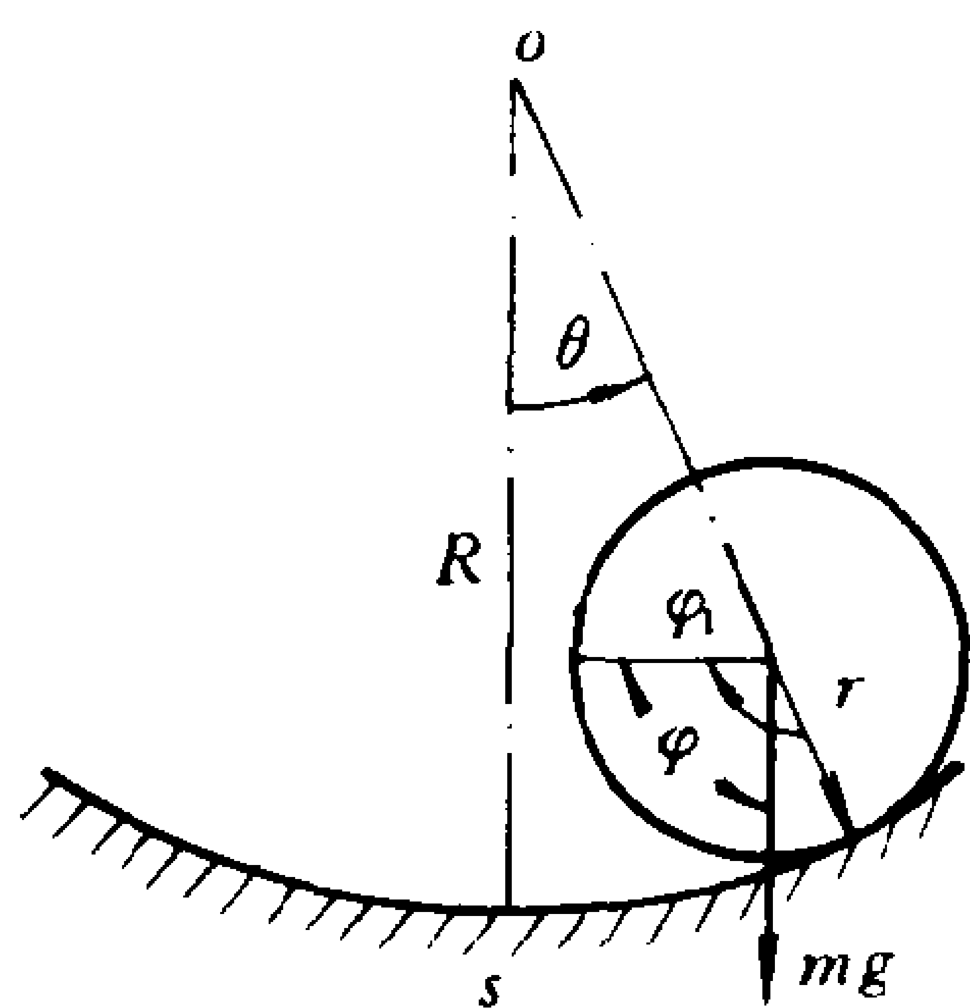
答 $$p = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

**2.6** 求图示两弹簧在 $o$ 点的等值刚度系数。杆 $AB$ 可以在图示平面内绕 $o$ 点偏转。

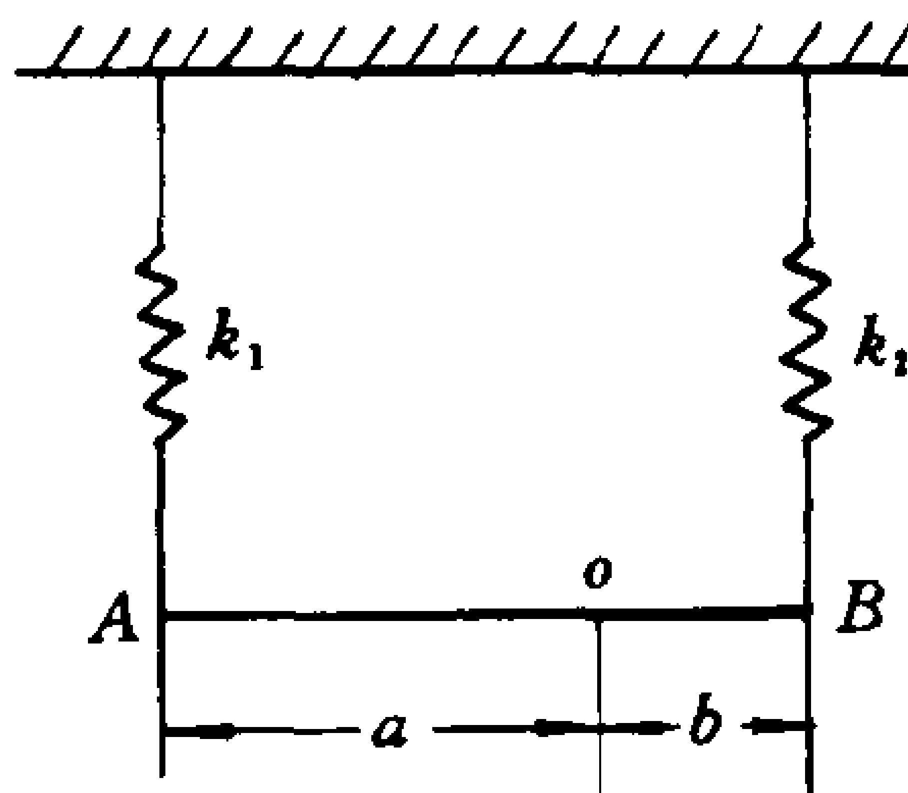
答 $$k_0 = \frac{(a+b)^2}{\frac{a^2}{k_2}+\frac{b^2}{k_1}}$$

**2.7** 弹簧悬挂的物体，质量为 $m$，自由振动的周期为 $\tau$。设在物块 $m$ 上附加一个质量 $m_1$，则弹簧的静伸长增加 $l$，求当地的重力加速度。

**答** $g = \dfrac{4\pi^2 ml}{m_1\tau^2}$



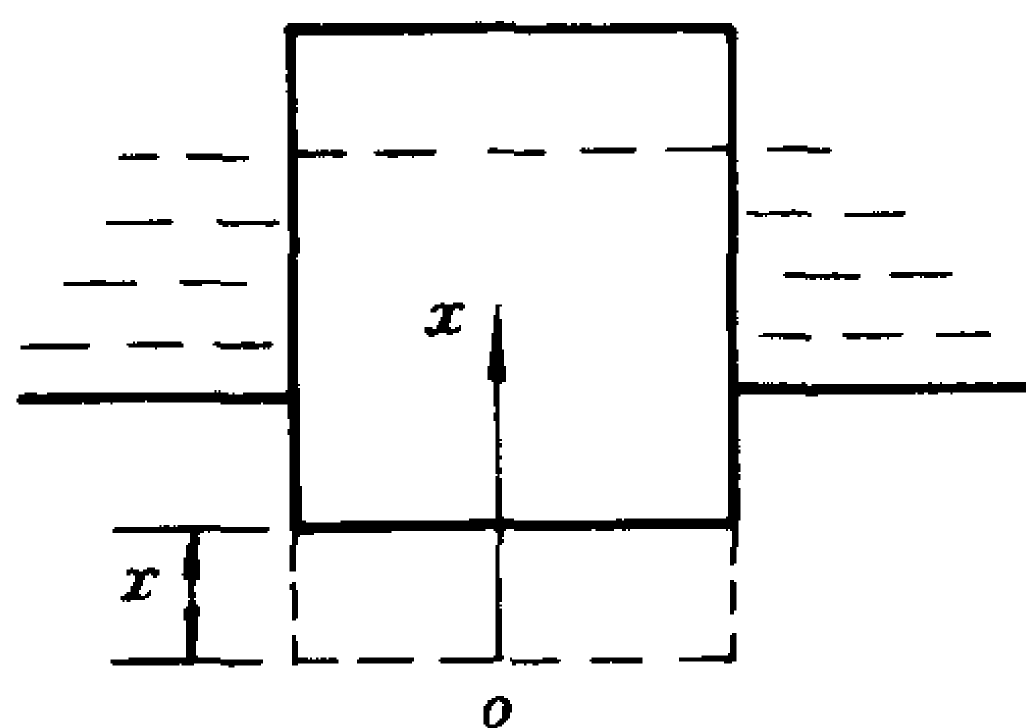

题图 2.5



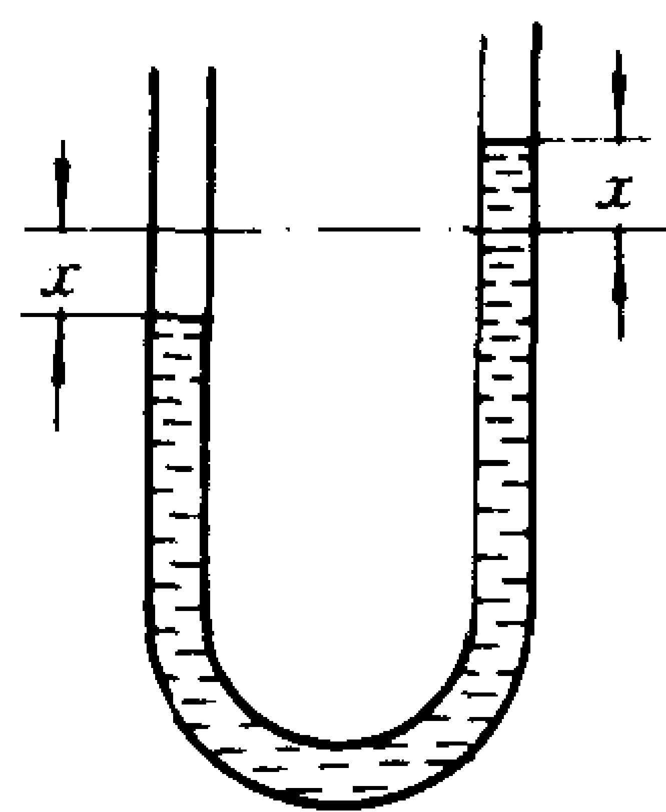

题图 2.6

**2.8** 横截面面积为 $A$、质量为 $m$ 的圆柱形浮子，静止浮在比重为 $\gamma$ 的液体中。设从平衡位置压低距离 $x_0$，然后无初速地释放，试求浮子此后的运动。假定阻尼可以不计。

**答** $x = x_0\cos\sqrt{\dfrac{A\gamma}{m}}t$




题图 2.8




题图 2.9

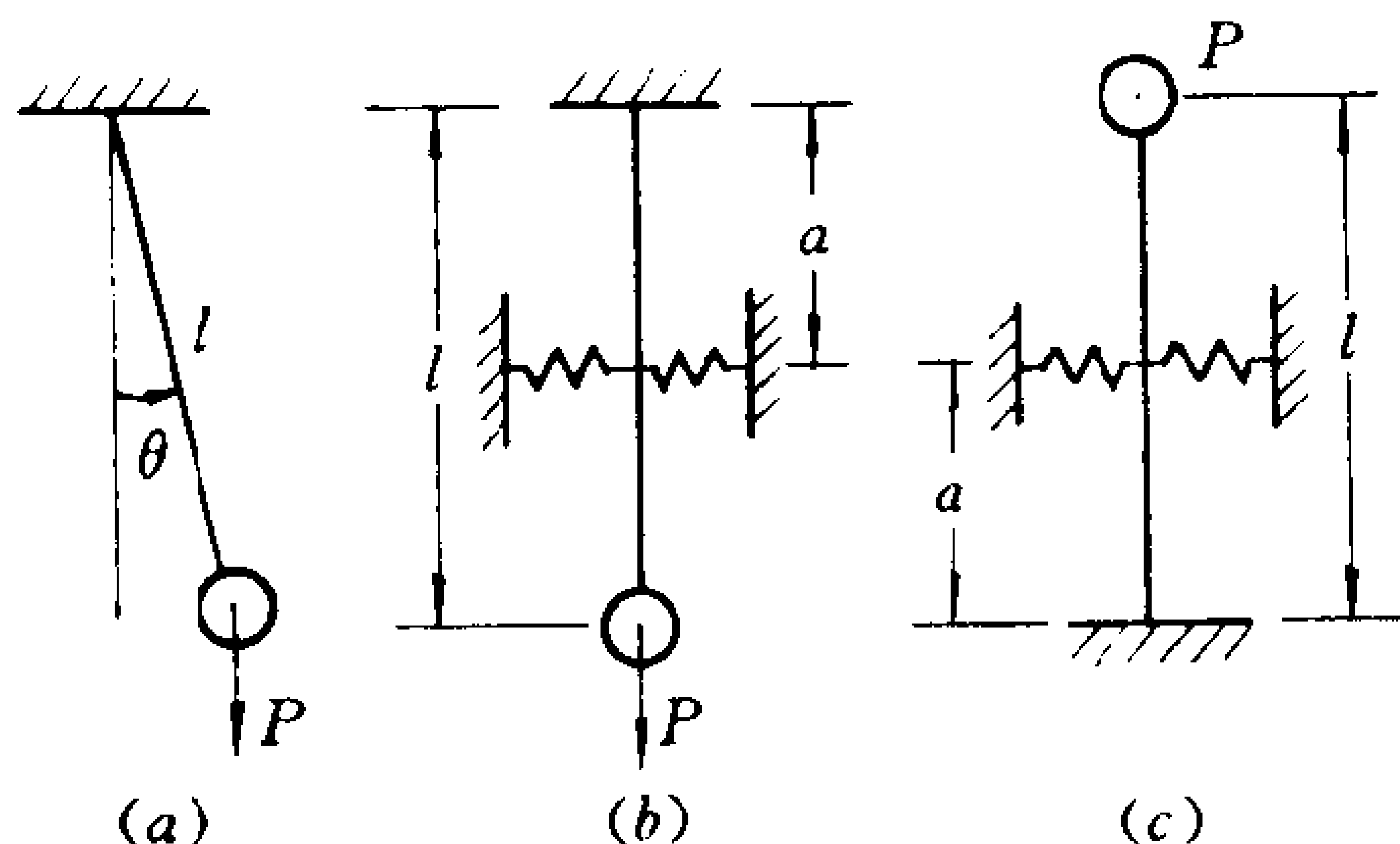
**2.9** 求等截面 U 形管内液体振动的周期，阻力不计。假定液

柱总长度为 $l$。

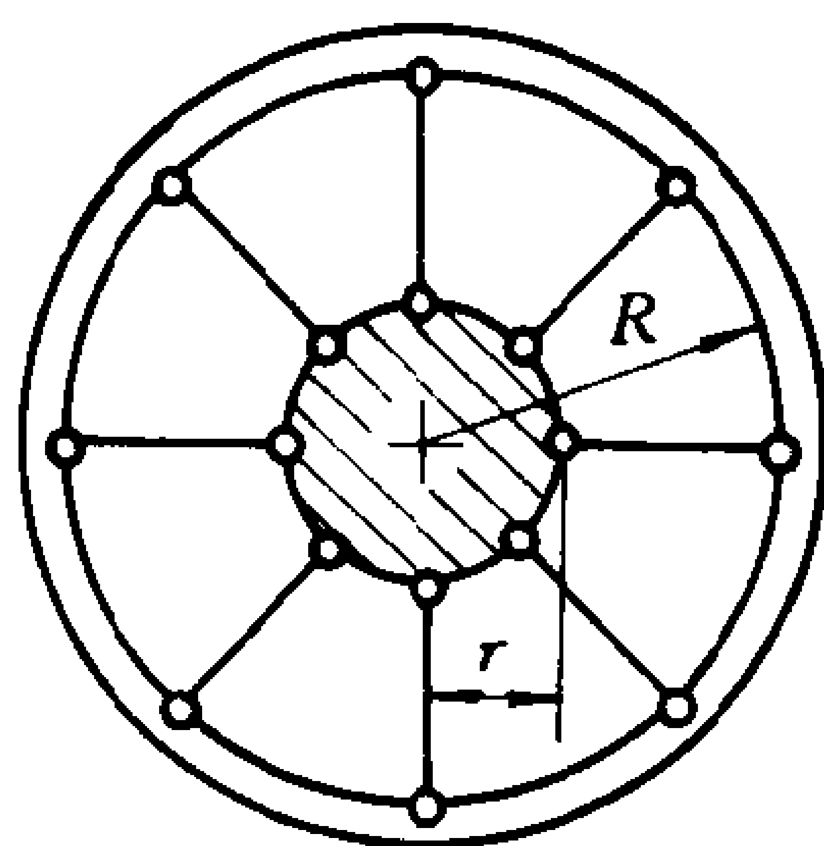
答 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$

**2.10** 求图示三个摆微幅振动的固有频率。摆锤重为 $P$，杆重不计，(b) 与 (c) 中每个弹簧的刚度系数为 $\dfrac{k}{2}$。

答 $p = \sqrt{\dfrac{g}{l}}, p = \sqrt{\dfrac{g}{l}\left(1 + \dfrac{ka^2}{pl}\right)}, p = \sqrt{\dfrac{g}{l}\left(\dfrac{ka^2}{pl} - 1\right)}$




题图 2.10

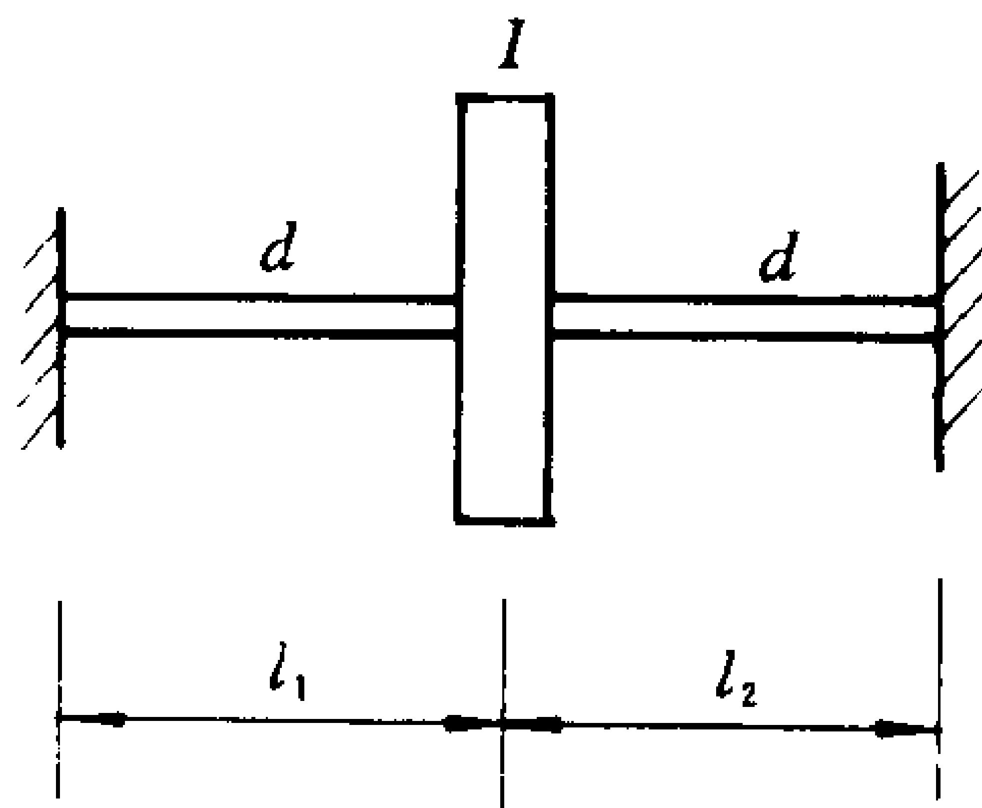



题图 2.11

**2.11** 钢圈重为 $P$，平均半径为 $R$，用 $n$ 根径向辐条连至半径为 $r$ 的固定轮毂，辐条两端铰接。求钢圈绕轮毂扭振的固有周期，辐条重量不计，拉力为 $S_0$，在振动中拉力不变。

答 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R(R-r)P}{ngS_0r}}$

**2.12** 求图示轴系扭转振动的固有频率。轴的直径为 $d$，圆盘的转动惯量为 $I$。




题图 2.12

答　$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi d^4 G(l_1 + l_2)}{32 l_1 l_2 I}}$

**2.13**　等截面水平梁，长度为 $l$，两端简支，截面抗弯刚度为 $EI$，在梁的中点处载有重物 $P$。(1) 不计梁本身质量，求系统的固有频率；(2) 设梁单位长度的质量为 $\rho$，考虑分布质量的影响，求系统固有频率。假定在振动中，梁的振型曲线与梁在中点受集中载荷时的静挠曲线具有同一形式，即有

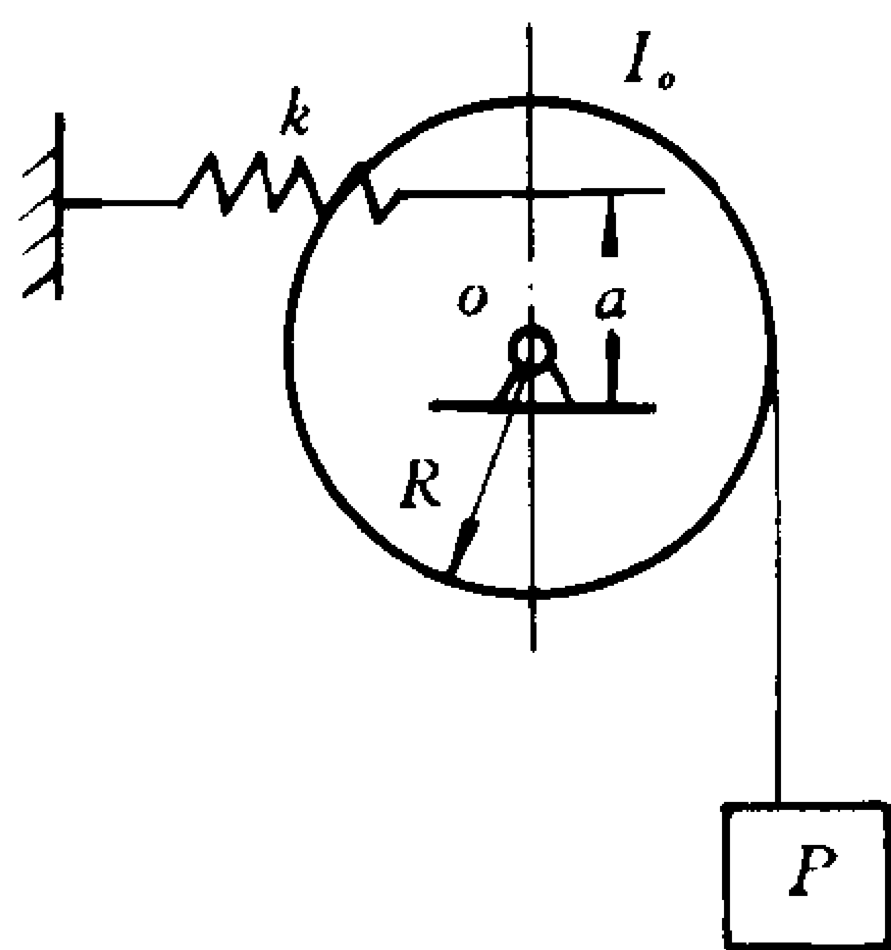
$$\gamma(x) = y_0\left\{3\left(\frac{x}{l}\right) - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\},\quad 0 < x < \frac{l}{2}$$

其中 $y_0$ 为梁中点振幅。

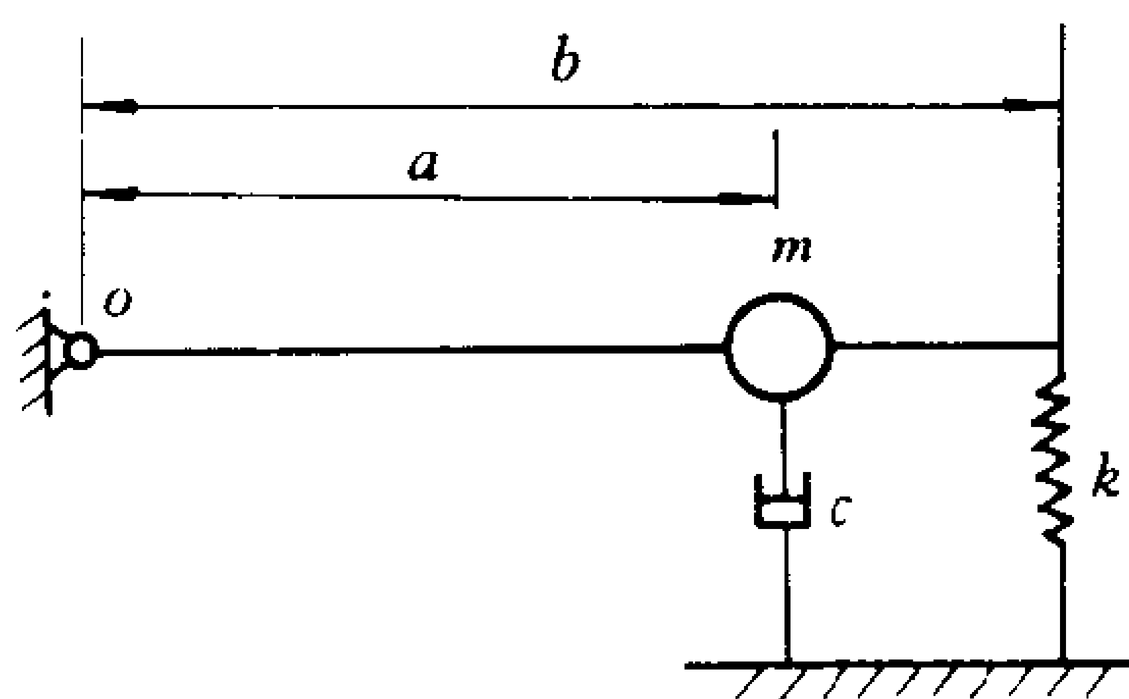
答　(1) $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{48EIg}{Pl^3}}$；(2) 梁的等值质量为 $0.486\rho l$

**2.14**　图示轮子可绕水平轴 $o$ 转动，对转轴的转动惯量为 $I_o$，轮缘绕有一软绳，下端挂有质量 $P$ 的物体，绳与轮缘之间无滑动。在图示位置，由水平弹簧 $k$ 维持平衡。半径 $R$ 与 $a$ 都是已知的。求系统微幅振动的周期。

答　$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o + R^2P/g}{ka^2}}$




题图 2.14




题图　2.15

**2.15**　写出图示系统的运动微分方程，以及衰减振动的频率

与临界阻尼的表达式。

答 $q=\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}$

$c_c=2\frac{b}{a}\sqrt{mk}$

**2.16** 衰减振动的振幅在10次的振动过程中，由 $A_1=3.0$ cm 缩小到 $A_2=0.06$ cm，求对数减缩率。

答 $\delta=0.391$

**2.17** 挂在弹簧下端的物体，重1.96 N，弹簧系数 $k=0.05$ N/cm，阻尼系数 $c=0.02$ N·s/cm。现将物体从平衡位置拉下5 cm，然后无初速地释放，求此后的运动。

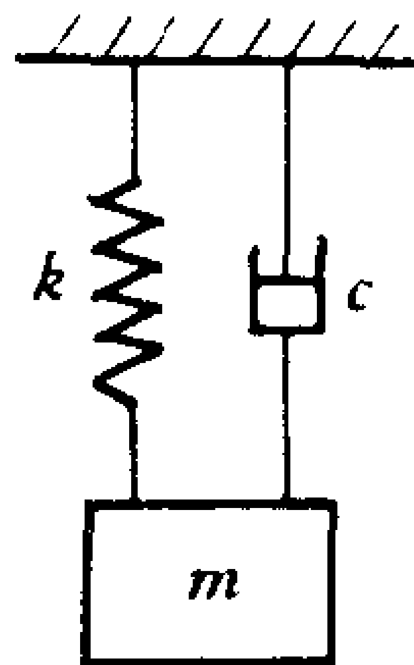
答 $x=5\,\mathrm{e}^{-5t}(1+5t)$ cm

**2.18** 试证明：在阻尼比 $\zeta=0.02$ 时，每周耗散的能量约为初值的1/4。

**2.19** 物体重2 N，挂在弹簧下端，弹簧系数 $k=4.9$ N/cm，求临界阻尼系数。

答 $c_c=0.20$ N·s/cm

**2.20** 在图示有粘性阻尼的振动系统中，质量 $m=10$ kg，刚度系数 $k=10$ kN/m。(1) 求临界阻尼系数 $c_c$；(2) 将物块压下，在离静平衡位置1 cm处无初速地释放，求阻尼系数 $c=0.2c_c, c_c, 1.2c_c$ 三种情形下，物块的运动方程。



题图 2.20

答 (1) $c_c=632$ N·s/m

**3.1** 挂在弹簧下端的物体重0.49 N，弹簧系数为0.2 N/cm，求在铅垂扰力 $F=0.23\sin 8\pi t$ N作用下，物块的振动规律。

答 $X=-2\sin 8\pi t$ cm

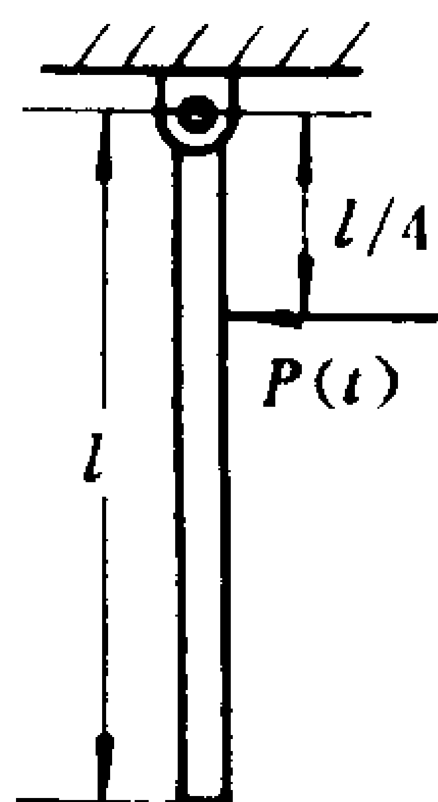
**3.2** 电动机重量为 $P$，装在弹性基础上，静下沉为 $\delta_s$，在转速

为 $n$ r/min 时，由于转子的不平衡，沿铅垂方向有正弦型扰力，使电机产生振幅为 $a$ 的强迫振动，试求扰力的力幅，阻尼可以不计。

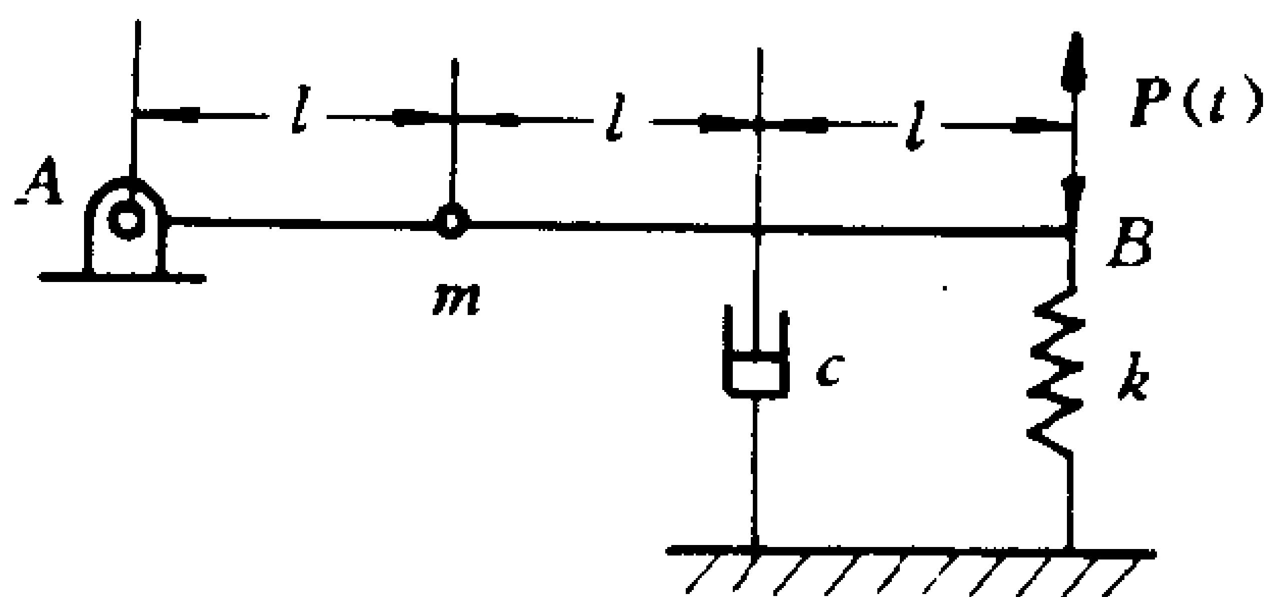
答　$F_0 = \frac{aP}{g}\left(\frac{g}{\delta_s} - \frac{n^2\pi^2}{900}\right)$

**3.3**　匀质细杆的长 $l = 40$ cm，重量为 20 N，上端由光滑铰链固定。今在距上端为 $l/4$ 处作用一水平周期扰力 $P(t) = P_0\sin\omega t$，其中 $P_0 = 2$ N，$\omega = 4\pi$ rad/s，求杆作稳态振动的振幅。

答　$\Theta = 0.869$




题图　3.3




题图　3.4

**3.4**　图中 $AB$ 为无重刚杆，$A$ 端由光滑铰链固定，在 $B$ 端作用周期扰力 $P(t) = P_0\sin\omega t$。已知重物的质量为 $m$，弹簧的刚度系数为 $k$，阻尼系数为 $c$，求共振振幅。

答　$X_r = \frac{P_0}{4c}\sqrt{\frac{m}{k}}$

**3.5**　在题 2.12 中的圆盘上施加外力偶 $M = 500\pi\sin 2\pi t$ N·cm，求圆盘扭转振动的振幅。已知轴的直径 $d = 2$ cm，$l = 40$ cm，剪切弹性模量 $G = 8\times10^5$ N/cm²，圆盘绕转轴的转动惯量为 $I = 1\,000$ N·cm·s²。

答　$\Theta = 0.067\,26$ rad

**3.6**　试证明：有阻尼弹簧质量系统在谐和激扰力作用下作强迫振动时，在频率比为

$$\gamma = \frac{\omega}{p} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

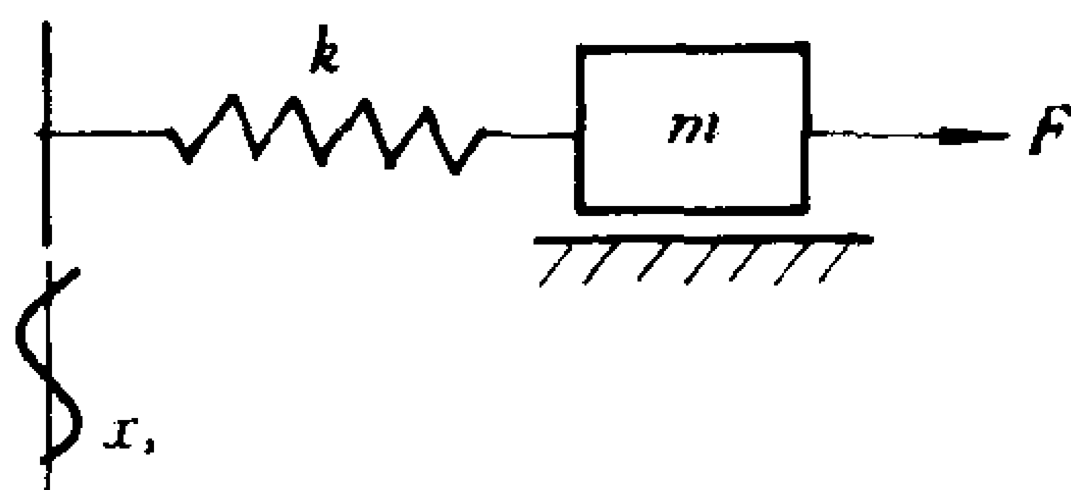
时振幅最大，此时放大率为

$$\beta = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

**3.7** 同上题题意，试证明当 $\gamma = 1$ 时，速度幅值最大，并导出速度幅值。

**答** $\dot{x}_{\max} = \dfrac{X_0}{2\zeta} p$

**3.8** 弹簧质量系统如图所示。今在质量块上作用一谐和扰力 $F = F_0 \sin\omega t$，同时在弹簧固定端有支承运动 $x_s = a\cos\omega t$。试写出系统的运动微分方程并求稳态强迫振动的振幅。




题图 3.8

**答** $x = \dfrac{1}{|1-\gamma^2|}\sqrt{a^2 + (\dfrac{F_0}{k})^2}$

**3.9** 弹簧下端挂有重为 $P$ 的物体，上端作简谐运动，$o_1B = a\sin\omega t$。求物体的强迫振动。已知 $P = 0.4\ \mathrm{N}$，$k = 0.04\ \mathrm{N/cm}$，$a = 2\ \mathrm{cm}$，$\omega = 7\ \mathrm{s^{-1}}$。

**答** $x = 4\sin 7t$

**3.10** 参阅上题附图，弹簧上端按 $o_1B = a\sin\omega t$ 上下运动，下端的物体使弹簧有静伸长 $\delta$。求物体的运动方程，设在 $t = 0$ 时，物体处于静止，并取这个静平衡位置为坐标轴 $x$ 的原点。

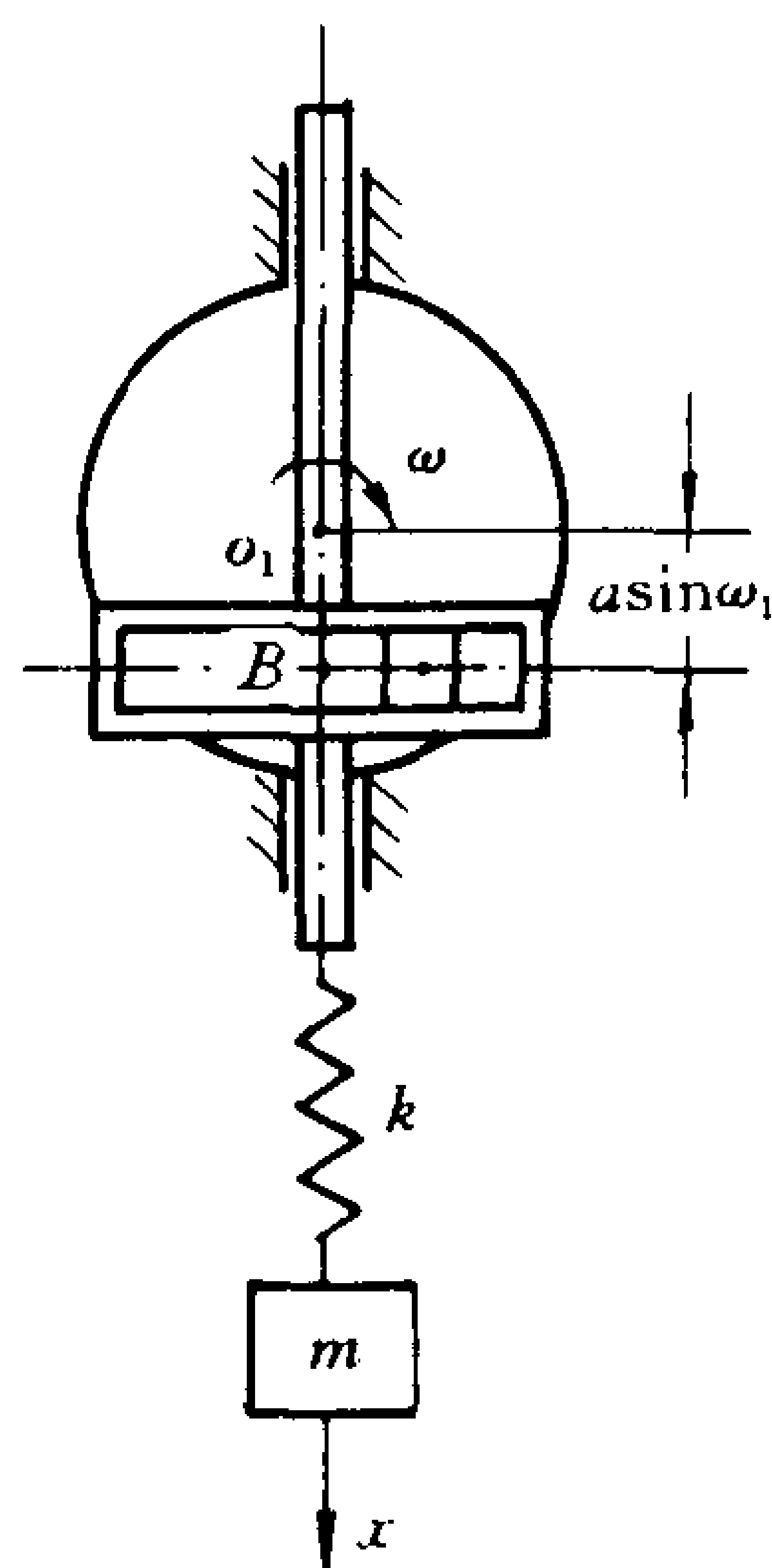
**答** 当 $\omega \neq p$ 时，$x = \dfrac{a}{(\dfrac{\omega}{p})^2 - 1}(\dfrac{\omega}{p}\sin pt - \sin\omega t)$

当 $\omega = p$ 时，$x = \dfrac{a}{2}(\sin pt - pt\cos pt)$

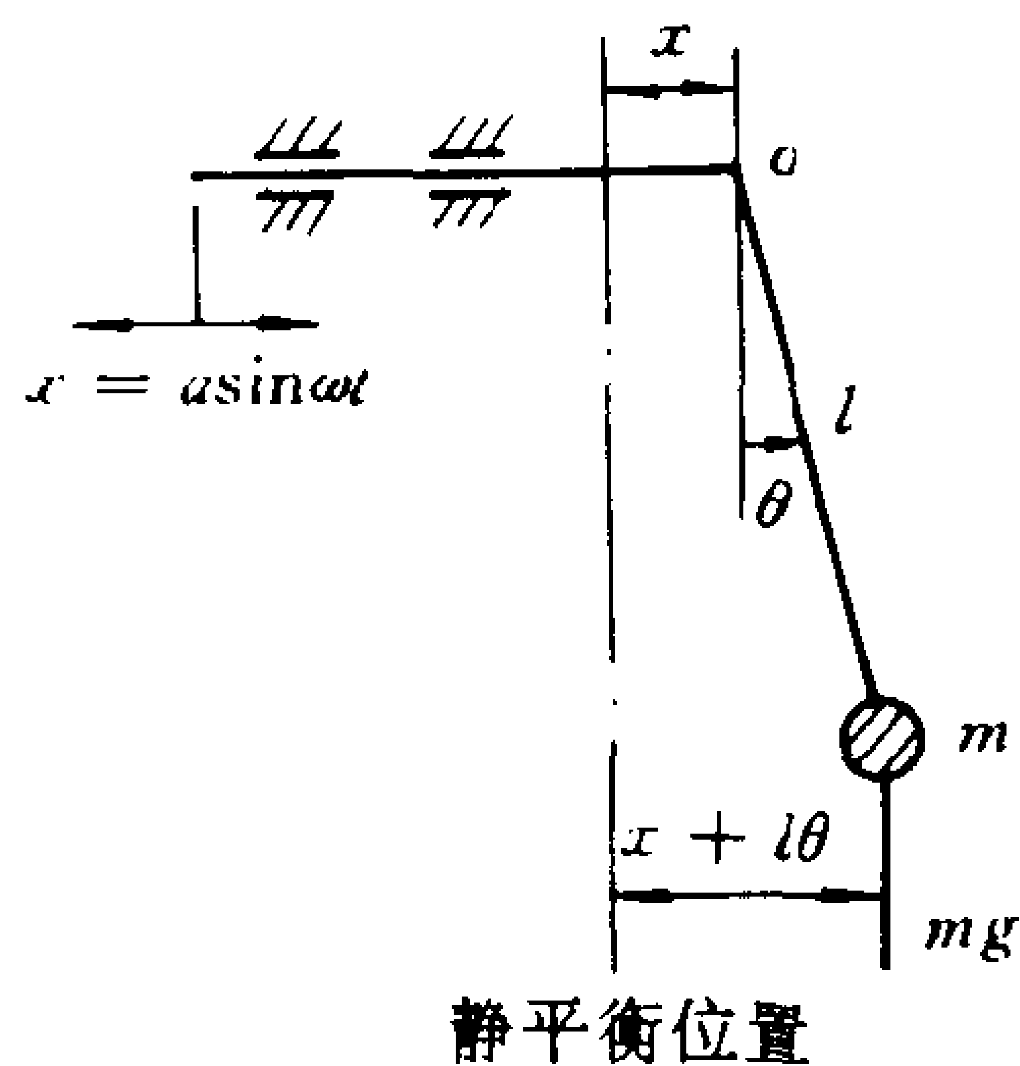
**3.11** 单摆悬点 $o$ 沿水平方向作简谐运动，$x = a\sin\omega t$。试求

在微幅的强迫振动中偏角 $\theta$ 的改变规律。已知摆长为 $l$，摆锤质量为 $m$。

答 $\theta = \dfrac{\dfrac{a}{l}(\dfrac{\omega}{p})^2}{1-(\dfrac{\omega}{p})^2}\sin\omega t$，其中 $p^2 = \dfrac{g}{l}$

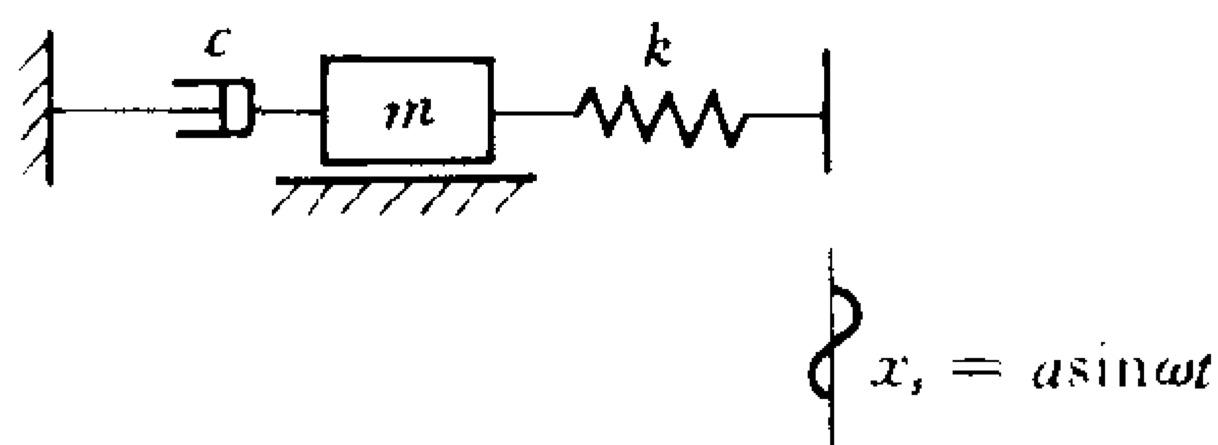



题图 3.9




题图 3.11

**3.12** 写出图示系统的运动微分方程，并求稳态振动的振幅。




题图 3.12

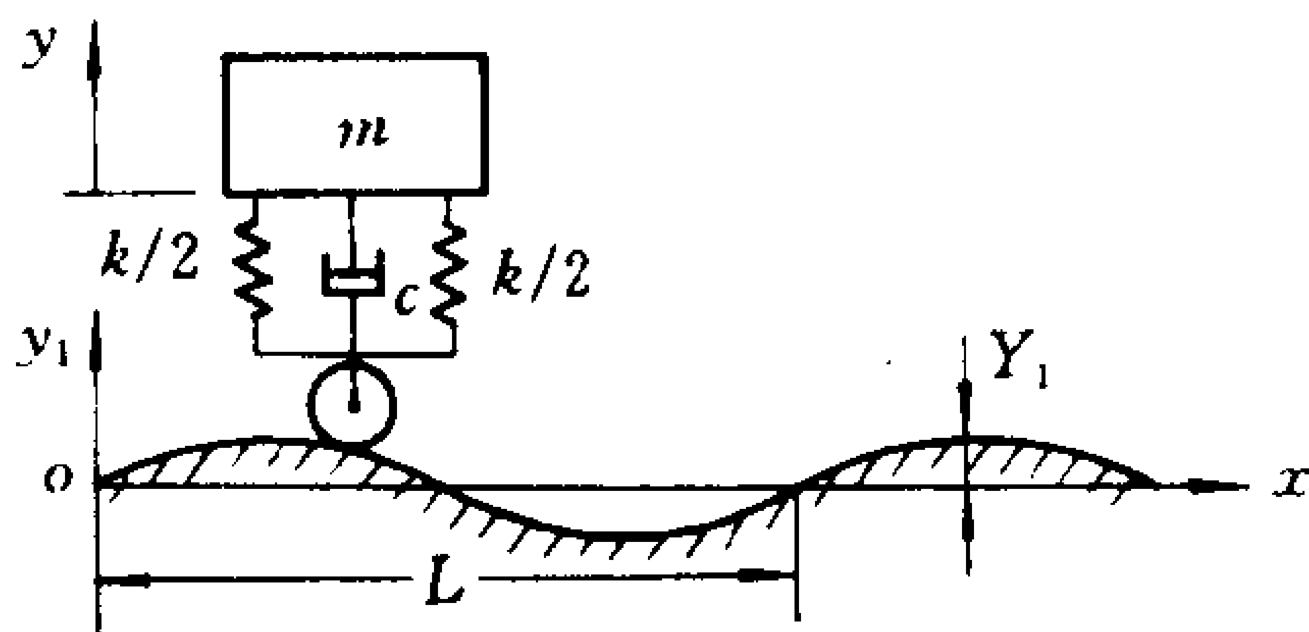
**答** $x = \dfrac{a}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + (2\zeta\gamma)^2}}$

**3.13** 小车重 $P$，可以简化为用弹簧支在轮子上的一个重量，弹簧刚度系数为 $k$，轮子重量与变形略去不计。某段路面成正弦波形，可以表示为

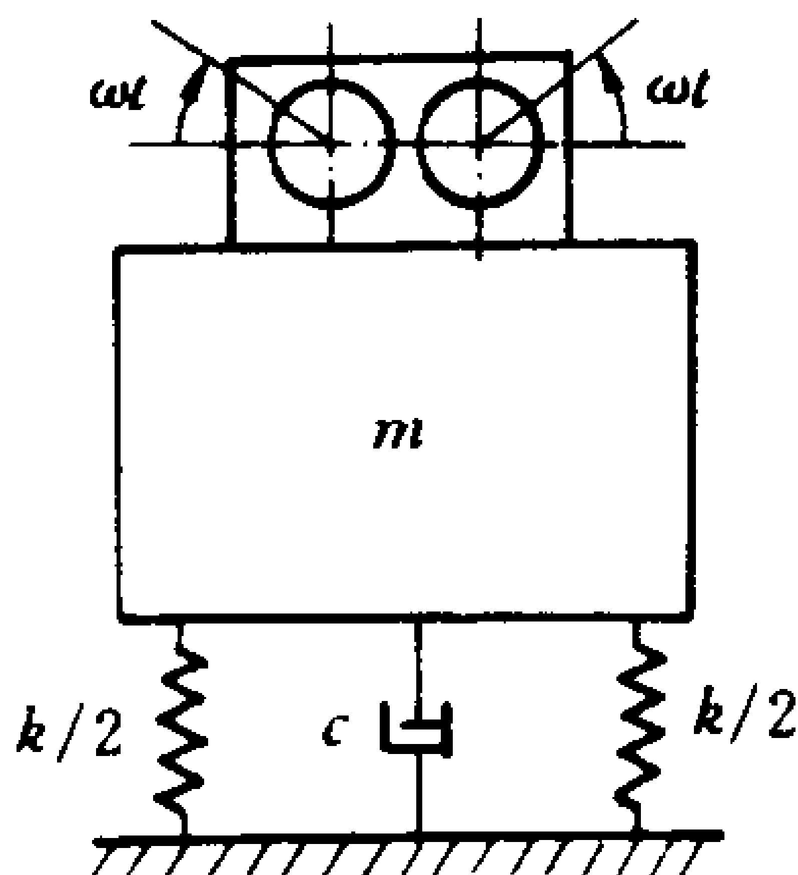
$$y_1 = Y_1 \sin \frac{2\pi x}{L}$$

试求小车以水平匀速度 $v$ 行驶时，车身上下强迫振动的振幅。设阻尼系数 $c = 0$。

**答** $Y = \dfrac{gL^2kY_1}{gL^2k - 4\pi^2v^2P}$




题图 3.13




题图 3.14

**3.14** 为了估计机器基座的阻尼比 $\zeta$，用激振器使机器上下振动。激振器有两个相同的偏心块，可沿相反方向绕水平轴以同一转速 $\omega$ 转动。当转速 $\omega$ 逐渐提高时，机器达到最大振幅 $X_r = 2$ cm；继续提高 $\omega$，机器的振幅渐趋稳定值 $X = 0.25$ cm。试求 $\zeta$。

**3.15** 一位移计的固有频率为 1 Hz，无阻尼，用以测 4 Hz 的简谐振动，测得振幅为 0.130 cm，问实际振幅为多少？误差为多少？

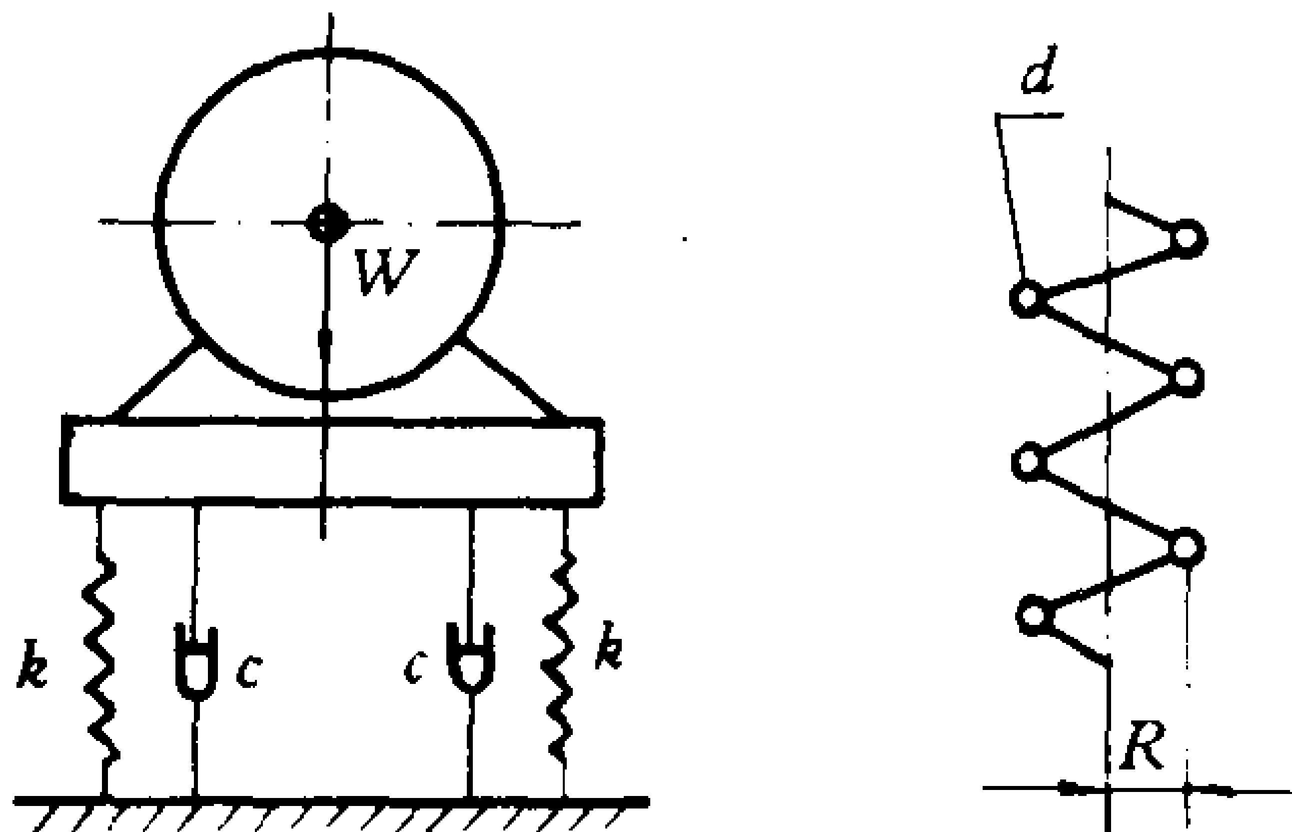
**答** 0.122 cm

**3.16** 一测地震用的加速度计，本身的固有频率为 20 $\mathrm{s^{-1}}$，阻

尼为$\zeta=0.7$。如果允许误差为1%，问该加速度计能测得的最高频率是多少？

答　$8.1\ s^{-1}$

**3.17**　某洗衣机机器部分重$W=2.2\times10^{3}$N，用四个螺旋弹簧在对称位置支承，每个弹簧的螺圈平均半径$R=51$ mm，弹簧丝直径$d=18$ mm，圈数$n=10$，剪切弹性模量$G=8\times10^{5}\ N/cm^{2}$。同时装有四个阻尼器，总的阻尼可用$\zeta=0.1$表示。在脱水时转速$N=600$ r/min，此时衣物偏心重为10 N，偏心距为40 cm，试求：(1) 洗衣机机器部分的最大振幅；(2) 传递率及隔振效率。




题图　3.17

答　(1) $x=0.19$ cm；(2) $\eta=0.0643$

**3.18**　图示力函数$f(t)$作用在有线性阻尼的弹簧质量系统上，求系统的稳态响应。

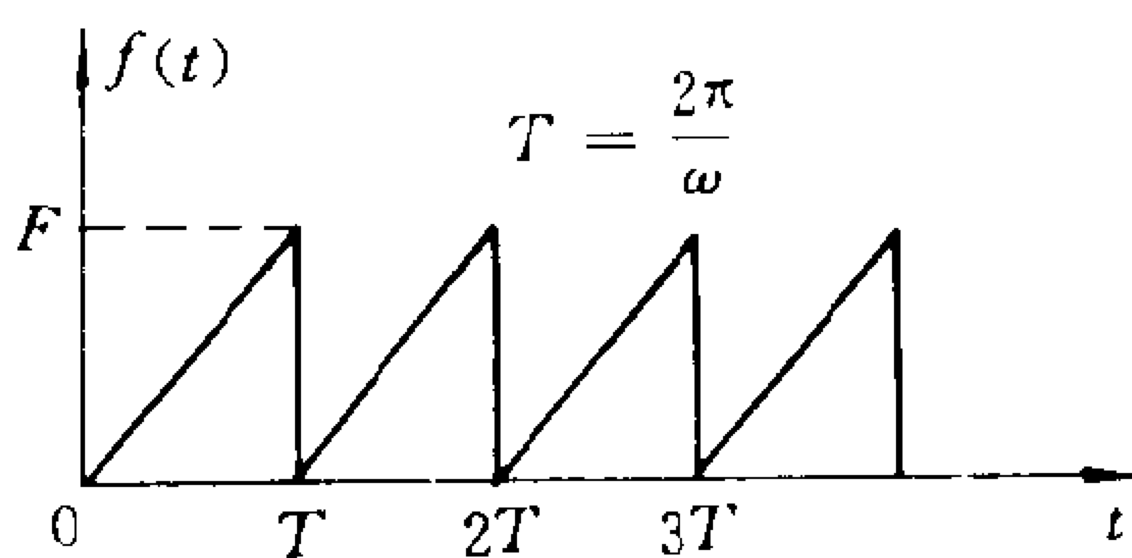
答　$$x=\frac{F}{2k}+\sum x_n\sin(n\omega t-\varphi_n)$$

其中　$$x_n=\frac{F/(n\pi)}{\sqrt{(k-n\omega m)^2+(n\omega)^2}},$$

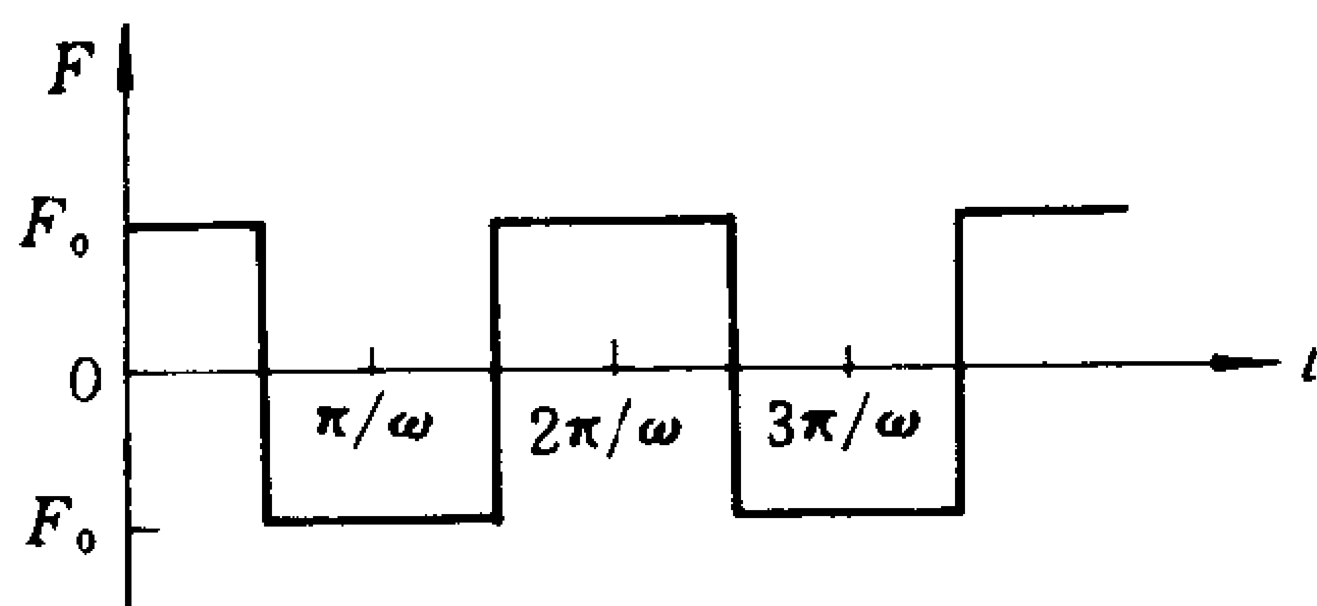
$$\tan\varphi_n=\frac{2\zeta(\frac{n\omega}{P})}{1-(\frac{n\omega}{P})^2},\quad 0<\varphi_n<\pi$$

**3.19**　一弹簧质量系统在图示的激扰力作用下作强迫振动。试求其稳态振动的响应。

答　$$x = \frac{4F_0}{\pi k} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin n\omega t}{n\left[1 - \left(\frac{n\omega}{p}\right)^2\right]}$$




题图　3.18




题图　3.19

**4.1**　试证明：有阻尼振系对作用于$t=0$时的冲量$\hat{F}$的响应，其出现峰值的时刻为

$$t_{\max} = \frac{1}{q} \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

并求峰值$x_{\max}$。

答　$$x_{\max} = \frac{\hat{F}}{mq} e^{-\frac{1}{a}\arctan a}, \quad a = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

**4.2**　用脉冲响应函数法求无阻尼振系对图示激扰力$f(t)$的响应。设$t=0$时，$x_0=0$，$\dot{x}_0=0$。

答　$$x = \frac{F_1}{k}(1-\cos pt), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1$$

$$x = \frac{F_1}{k}[\cos p(t-t_1) - \cos pt] - \frac{F_2}{k}[1-\cos p(t-t_1)], \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

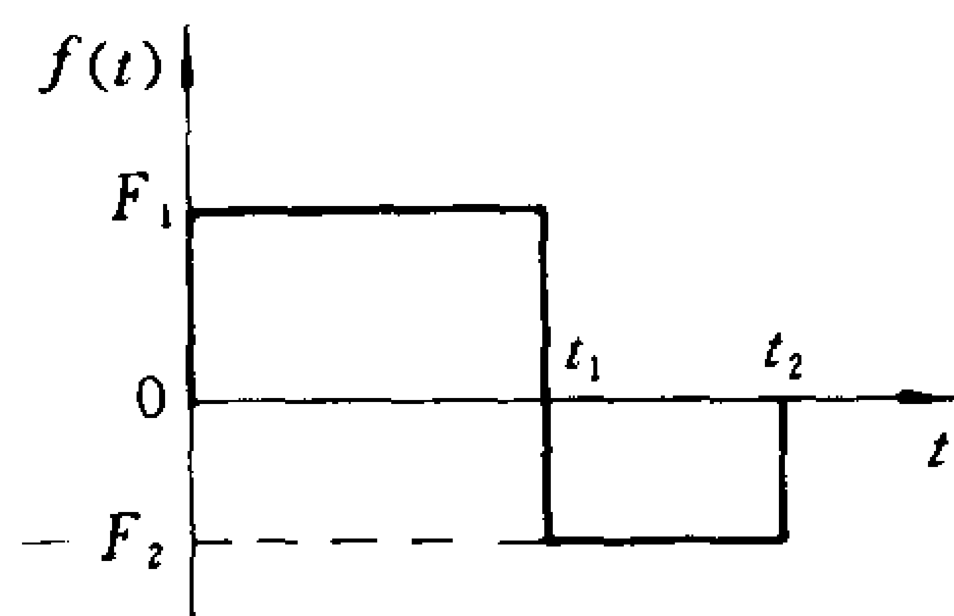
$$x = \frac{F_1}{k}[\cos p(t-t_1) - \cos pt] - \frac{F_2}{k} \times [\cos p(t-t_2) - \cos p(t-t_1)], \quad t_2 \leqslant t$$

**4.3**　将上题中的$f(t)$换成题图4.3给出的形式，求系统的

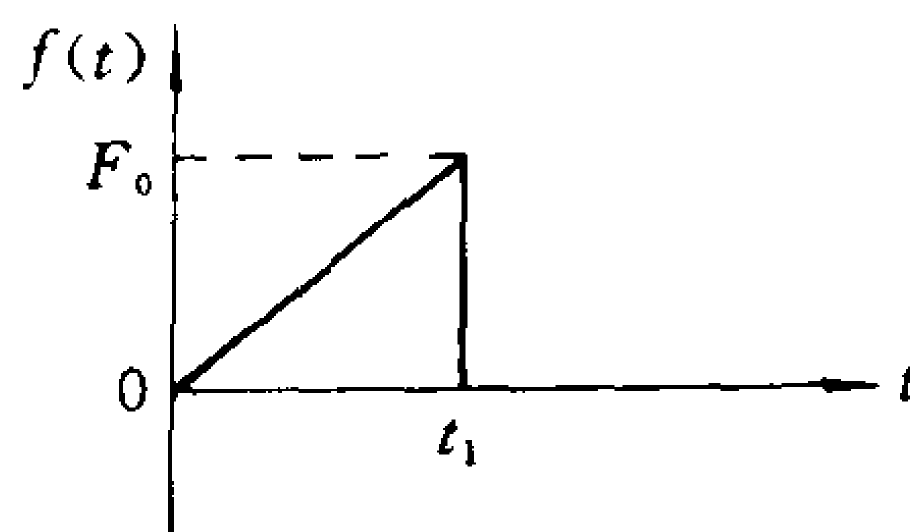
响应。

**答**　$$x=\frac{F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin pt}{pt_1}\right),\quad 0\leqslant t\leqslant t_1$$

$$x=\frac{F_0}{k}\left[\frac{\sin p(t-t_1)-\sin pt}{pt_1}+\cos p(t-t_1)\right],t\leqslant t_1$$



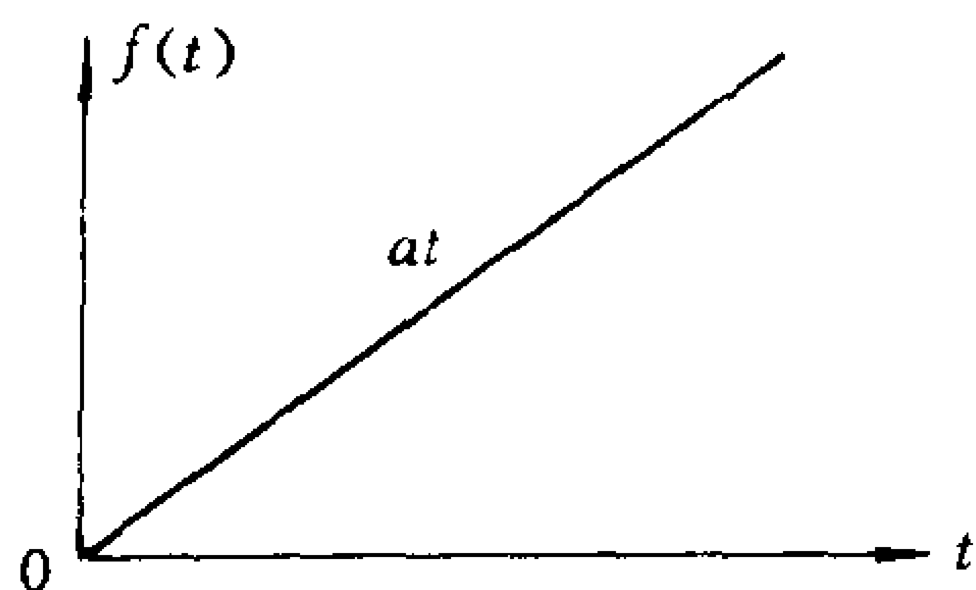

题图　4.2



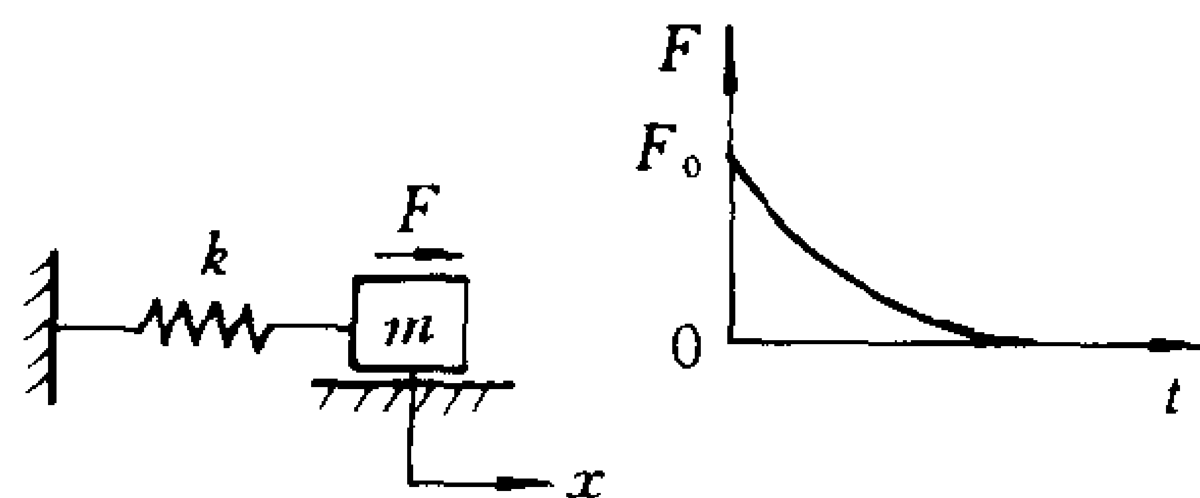

题图　4.3

**4.4**　求无阻尼弹簧质量系统对图示斜坡力函数 $f(t)=at$ 的响应。设 $t=0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$。

**答**　$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt+\frac{a}{k}\left(t-\frac{1}{p}\sin pt\right)$$




题图　4.4



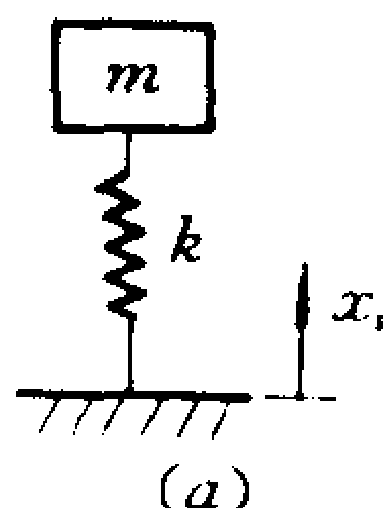

题图　4.5

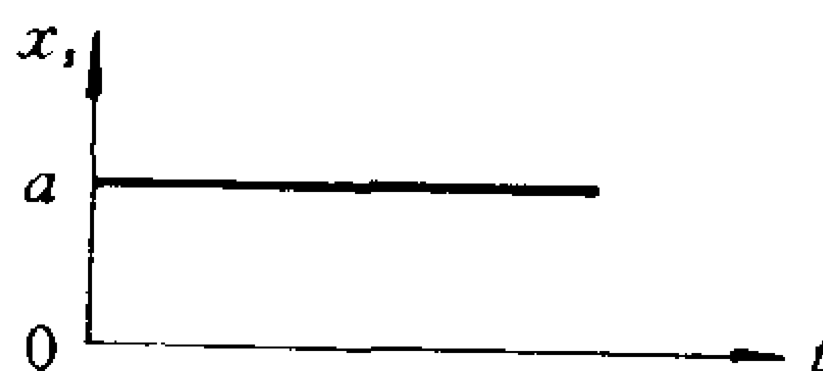
**4.5**　试求图示弹簧质量系统在力 $F=F_0\mathrm{e}^{-bt}$ 作用下的响应。系统初始时静止。

**答**　$$x=\frac{F_0}{mb^2+k}\left(\frac{b}{p}\sin pt-\cos pt+\mathrm{e}^{-bt}\right)$$

**4.6**　当图示系统支承处有突然向上的位移 $x_s=a$ 时，求系统的响应。

**答** $x = a(1 - \cos pt)$



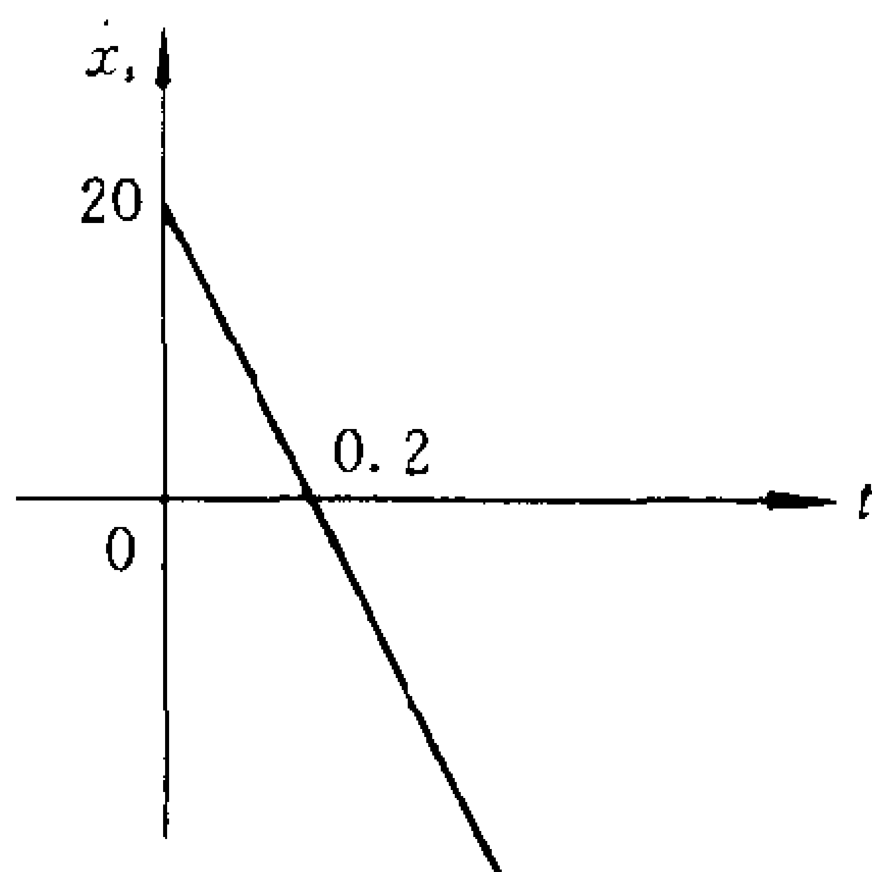

题图 *4.6

**4.7** 用拉普拉斯变换法，求有阻尼弹簧质量系统，当支承有运动 $x_s = vt$ 时，系统的响应。系统初始时静止。

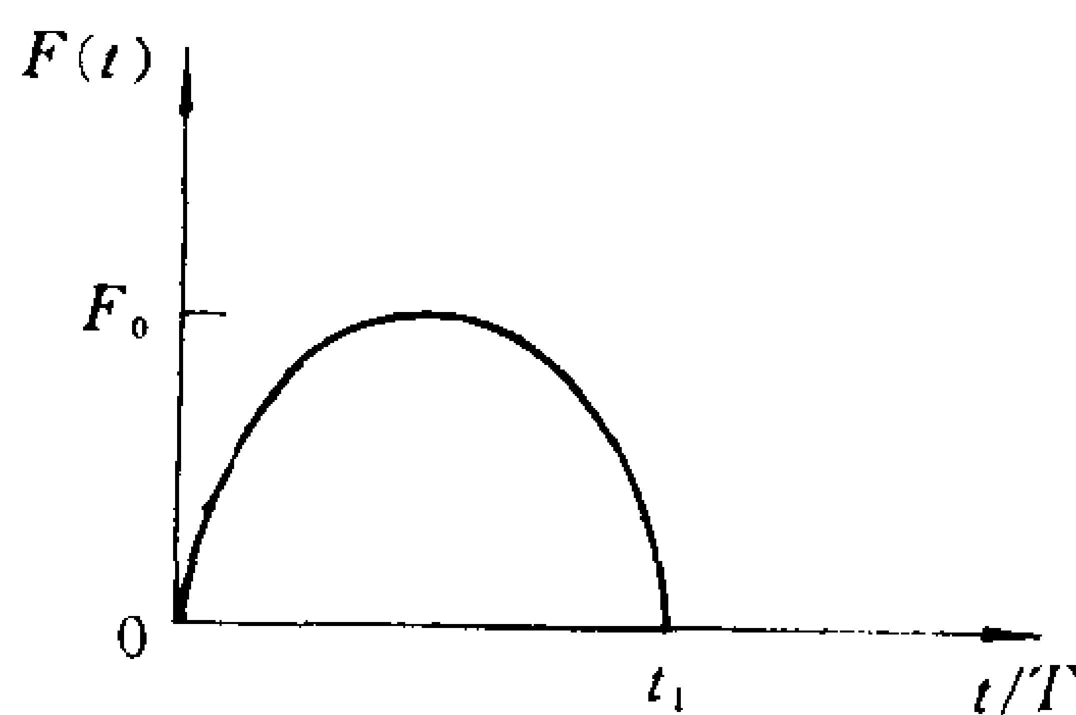
**答** $x = v(t - \frac{e^{-\zeta pt}}{q}\sin qt)$

**4.8** 已知支承速度为 $\dot{x}_s = 20(1 - 5t)$。求弹簧质量系统相对于支承的响应 $x(t)$。设 $t = 0$ 时，$x_0 = 0$，$\dot{x}_0 = 0$。

**4.9** 试画出无阻尼弹簧质量系统对题图 4.3 所示三角形脉冲的冲击响应谱。




题图 4.8



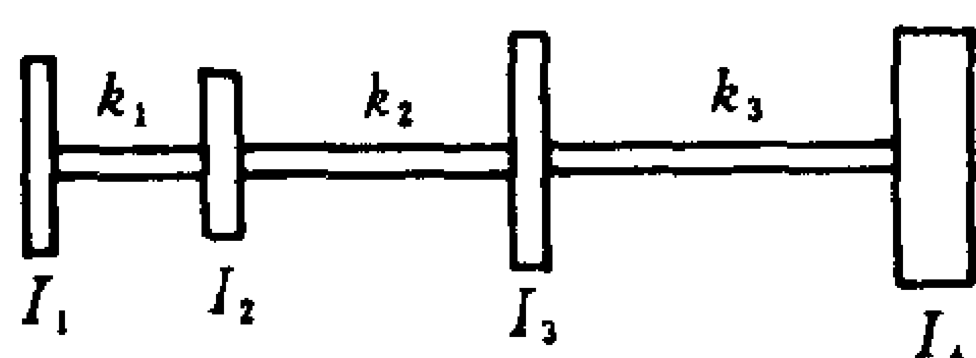

题图 4.10

**4.10** 试画出无阻尼弹簧质量系统对半正弦脉冲的冲击响应谱，并证明：当 $t_1/T = \frac{1}{2}$ 时，响应峰值出现在 $t = t_1$ 时刻；而对于

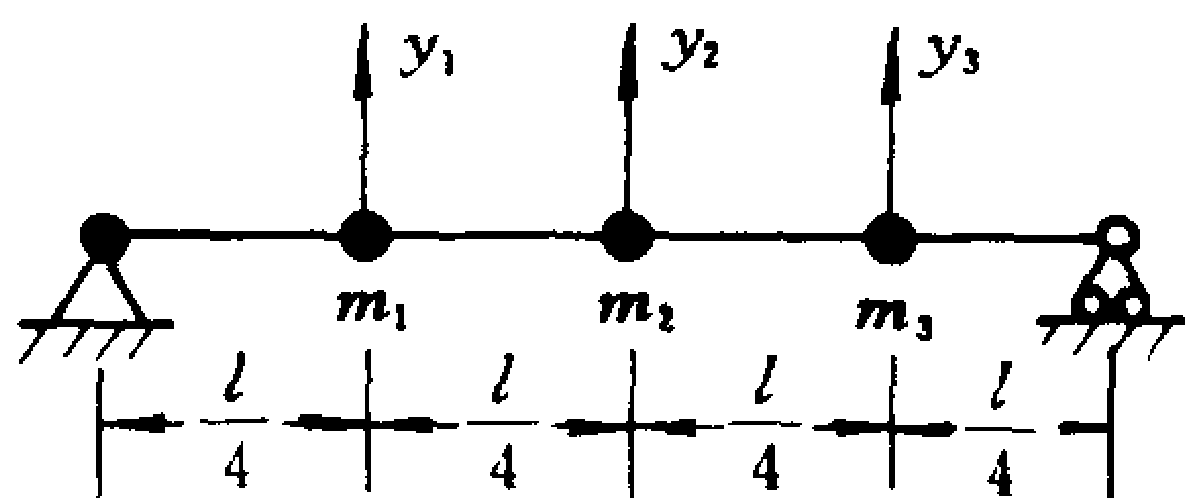
较小的 $t_1$ 值，则峰值出现在剩余振动阶段。

**5.1**　写出图示轴盘扭转系统的刚度矩阵。

答　$$K=\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$




题图　5.1




题图　5.2

**5.2**　写出图示梁的柔度矩阵。梁本身质量略去不计，抗弯刚度为 $EI$。

答　$$R=\frac{l^3}{768EI}\begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

**5.3**　图示弹簧质量系统中，如 $m_1=m_2=m_3=m$，$k_1=k_2=k_3=k$，求其各阶固有频率和主振型。

答　$$p_1=0.445\sqrt{\frac{k}{m}},\ p_2=1.247\sqrt{\frac{k}{m}},\ p_3=1.802\sqrt{\frac{k}{m}}$$

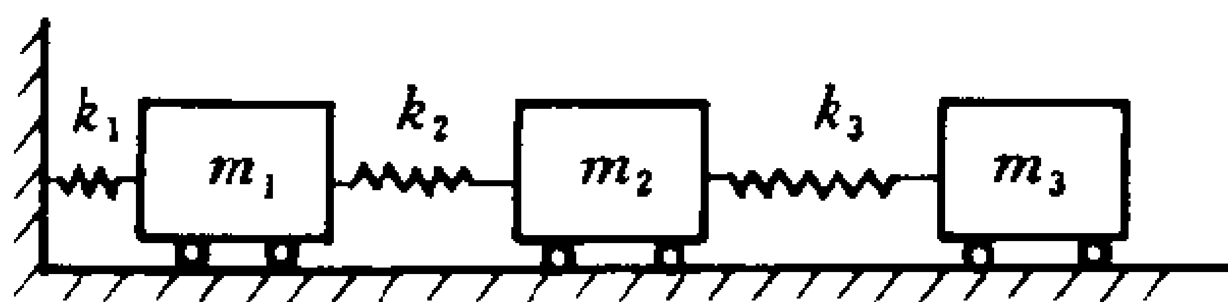
$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} 0.445 \\ 0.802 \\ 1.000 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix} -1.247 \\ -0.555 \\ 1.000 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix} 1.802 \\ -2.247 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

**5.4**　图示扭振系统由扭转刚度为 $k_1$ 的轴，半径为 $r$、转动惯量为 $I_1$ 的轮毂，半径为 $R$、转动惯量为 $I_2$ 的外轮和四个片状弹簧（每个弹簧外端的刚度系数为 $k_2$）所组成，假定轴的一端固定并忽略轴的质量。试建立扭转振动的振动微分方程，并证明其频率方程

可化为

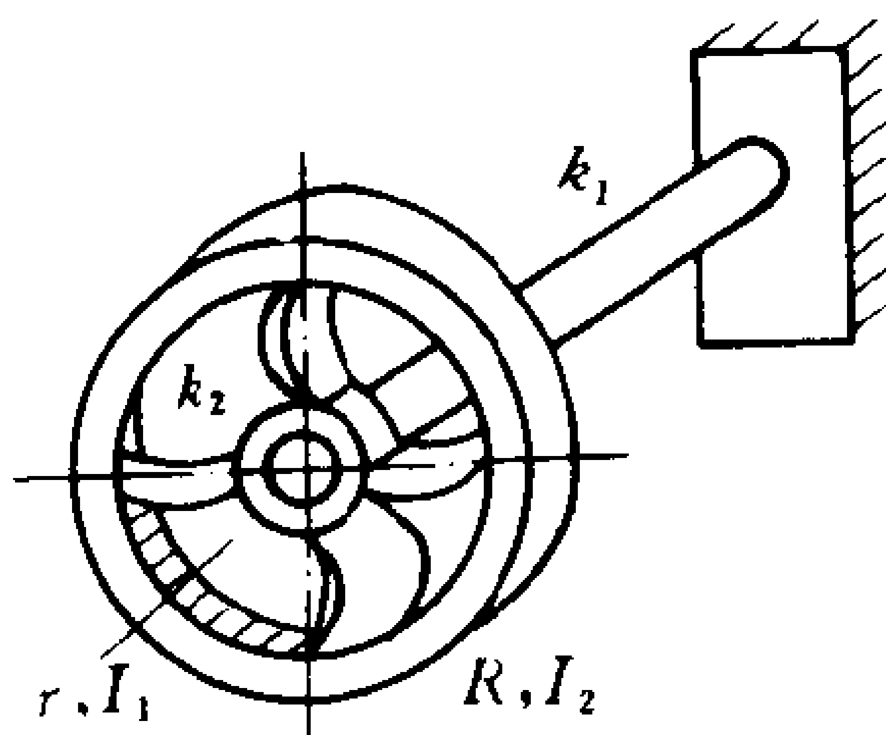
$$p^4-(\omega_{11}^2+\omega_{22}^2+\frac{I_2}{I_1}\omega_{22}^2)p^2+\omega_{11}^2\omega_{22}^2=0$$

式中 $\omega_{11}^2=\dfrac{k_1}{I_1}$， $\omega_{22}^2=\dfrac{4k_2R^2}{I_2}$。

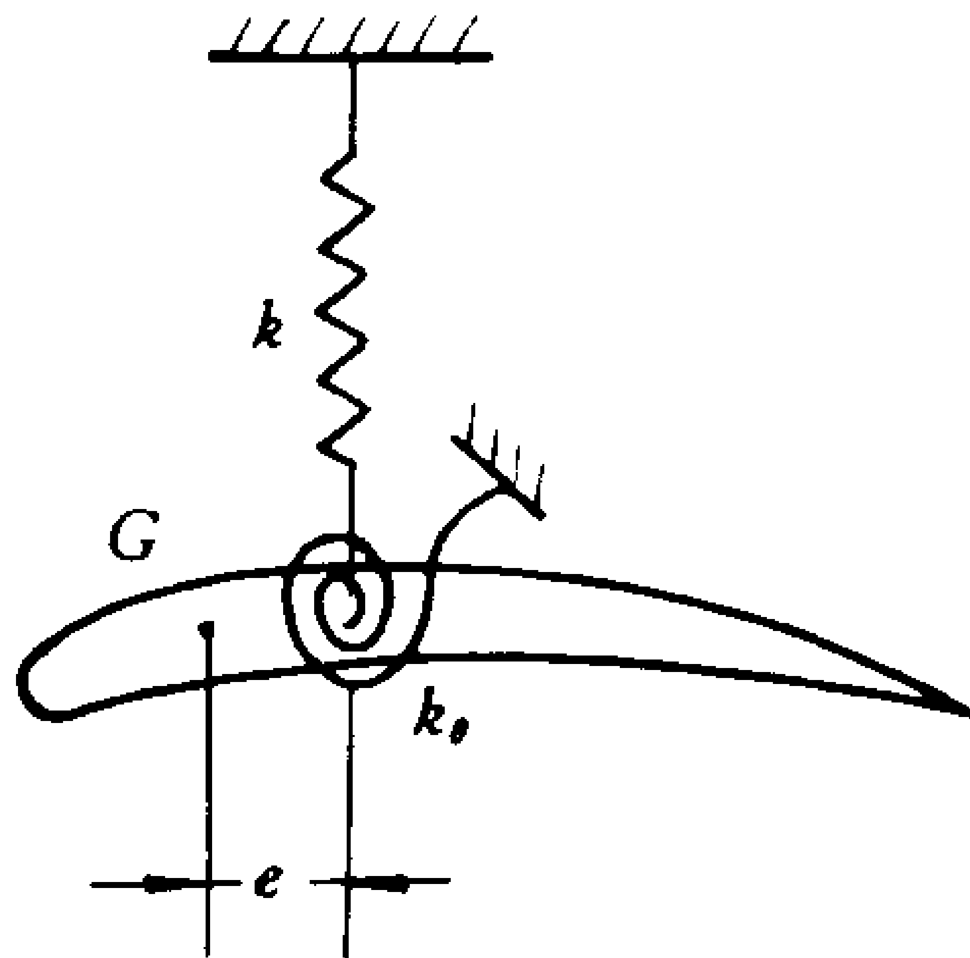


题图 5.3

**5.5** 在风洞实验中，把机翼翼段简化为图示平面内的刚体，并由刚度为 $k$ 的弹簧和刚度为 $k_\theta$ 的扭簧所支持。已知翼段的质量为 $m$，绕重心 $G$ 的转动惯量为 $I_0$，重心与支持点的距离为 $e$。试求系统在图示平面内微振动的频率方程。



题图 5.4



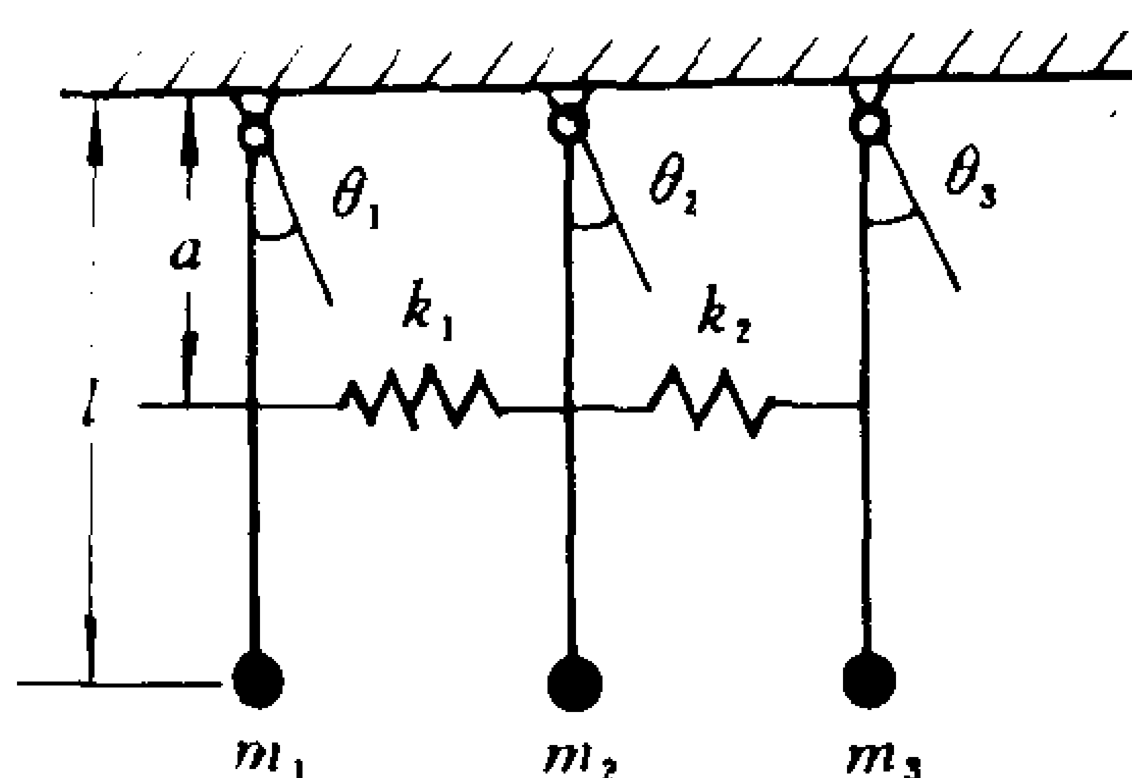
题图 5.5

答 $$p^4-\left(\frac{k}{m}+\frac{k_\theta+ke^2}{I_0}\right)p^2+\frac{kk_\theta}{mI_0}=0$$

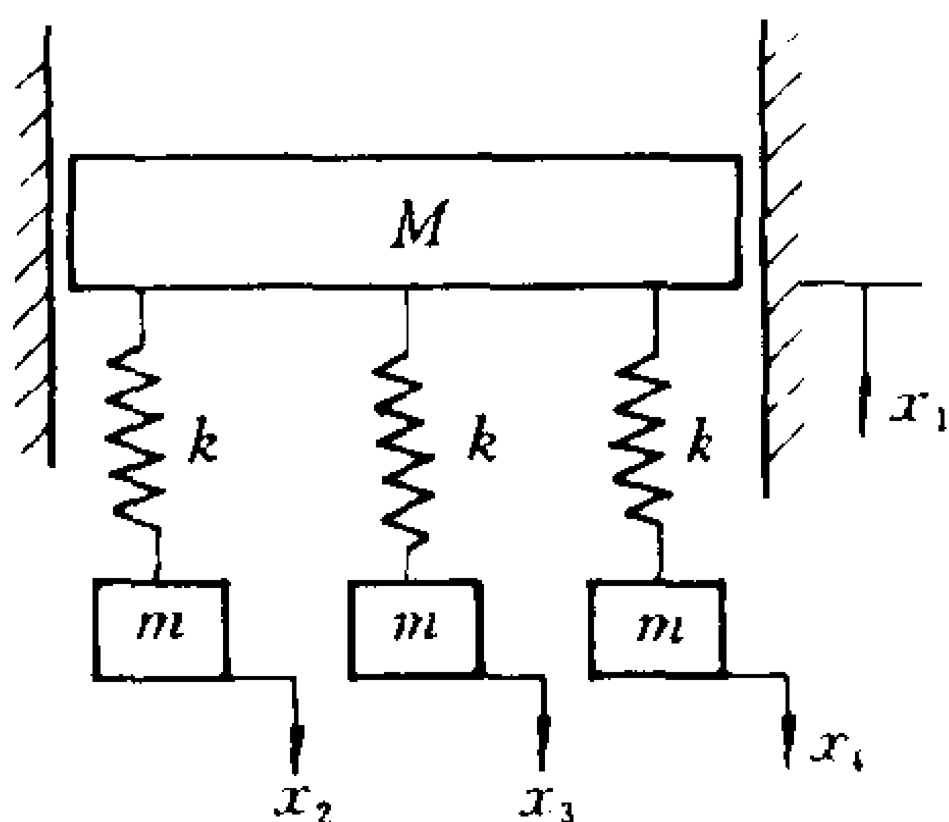
**5.6** 三个单摆借两个弹簧连接，如图所示。令 $m_1=m_2=m_3=m$，$k_1=k_2=k$。(1) 试以 $\theta_1$、$\theta_2$ 及 $\theta_3$ 为广义坐标，建立系统的运动微分方程；(2) 求出系统的固有频率及相应的主振型。

**答**　$p_1^2=\frac{g}{l}, p_2^2=\frac{g}{l}+\frac{ka^2}{ml^2}, p_3^2=\frac{g}{l}+\frac{3ka^2}{ml^2}$

$$x_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad x_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad x_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$




题图 5.6




题图 5.7

**5.7**　在图示模型中，假定质量 $M$ 与各个 $m$ 都只能沿 $x$ 方向运动。试求系统的各阶固有频率及确定其振型矢量空间的完备基。

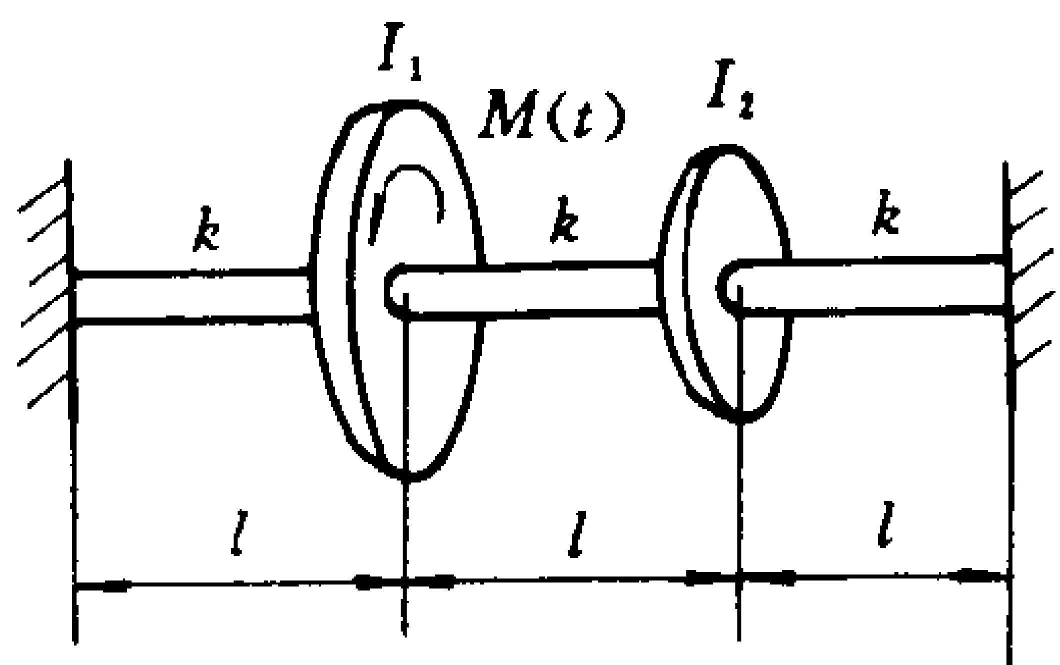
**5.8**　两端固定的轴，长为 $3l$，重量不计。轴上装有两圆盘，它们对轴的转动惯量 $I_1=2I_2$，各轴段的扭转刚度系数均为 $k$。今在左圆盘上作用有转矩 $M(t)=M_0\sin\omega t$，求系统的稳态强迫振动。

**答**　$\theta=\frac{M_0}{\Delta(\omega^2)}\begin{bmatrix}2k-I\omega^2\\k\end{bmatrix}\sin\omega t$

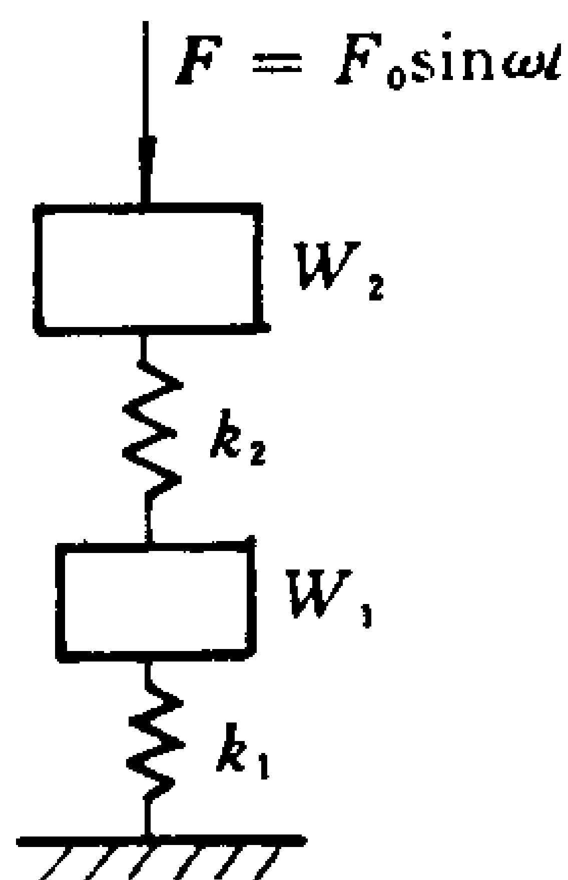
$\Delta(\omega^2)=(\omega^2-p_1^2)(\omega^2-p_2^2)$，　$p_1,p_2$ 为系统固有频率

**5.9**　某振动筛可简化为图示系统。已知：减振架重 $W_1=6\ 700$ N，槽体重 $W_2=18\ 700$ N，减振弹簧刚度 $k_1=7\ 392$ N/cm，$k_2=5\ 760$ N/cm。若在槽体上作用一激振力 $F=F_0\sin\omega t$，其中 $F_0=5\ 000$ N，$\omega=77$ rad/s。试求传到地基上的力的最大值。

**答**　$F_{\max}\doteq 730$ N




题图 5.8




题图 5.9

**5.10** 图示为一机车的简化模型。当机车在动力不平顺的轨道上行驶时，机车作上下振动，设不平顺度可用 $x_s = a\sin\omega t$ 表示。问当 $\omega$ 为基频 $p_1$ 的 0.707 1 倍时，车体的振幅为 $a$ 的多少倍。已知 $W_1 = 44\ 100$ N，$W_2 = 441\ 000$ N，$k_1 = 1.683 \times 10^7$ N/m，$k_2 = 3.136 \times 10^6$ N/m。

**答** 2.013 倍

**5.11** 在题 5.3 中，若在第三个质量上作用一静力 $P$，使系统处于平衡，然后突然释放，求系统的响应。

**答** $$x = \frac{P}{k}\begin{bmatrix} 1.22\cos p_1 - 0.28\cos p_2 t + 0.06\cos p_3 t \\ 2.20\cos p_1 t - 0.13\cos p_2 t - 0.07\cos p_3 t \\ 2.75\cos p_1 t + 0.23\cos p_2 t + 0.03\cos p_3 t \end{bmatrix}$$

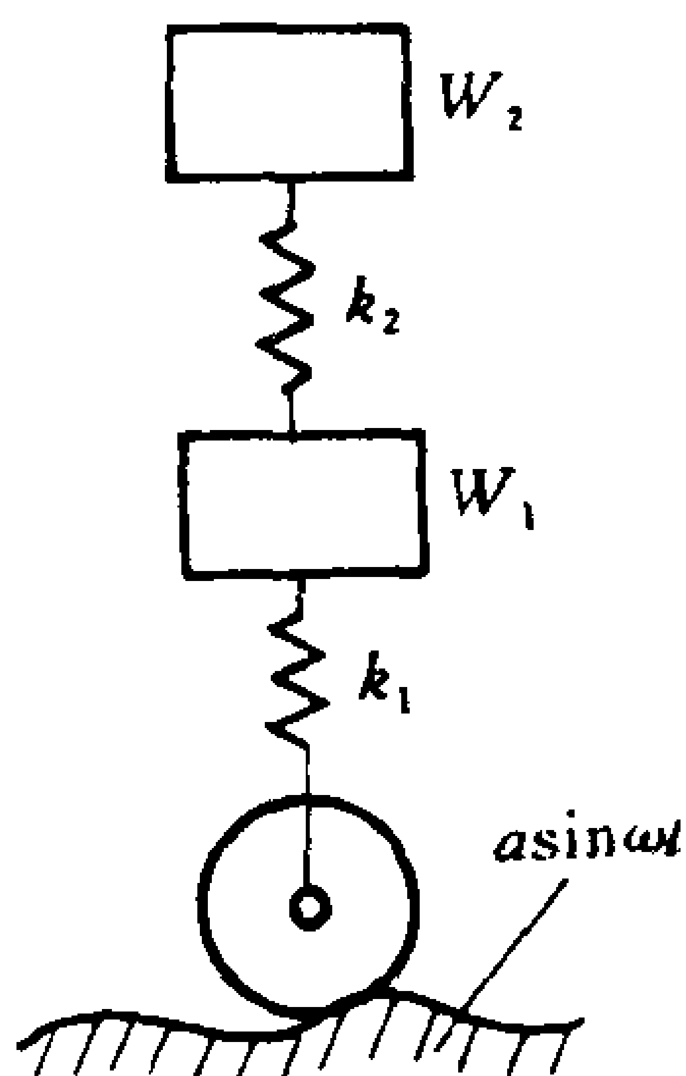
**5.12** 求图示三节摆的固有频率。

**答** $$p_1 = 0.645\ 4\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad p_2 = 1.514\ 6\sqrt{\frac{g}{l}},$$

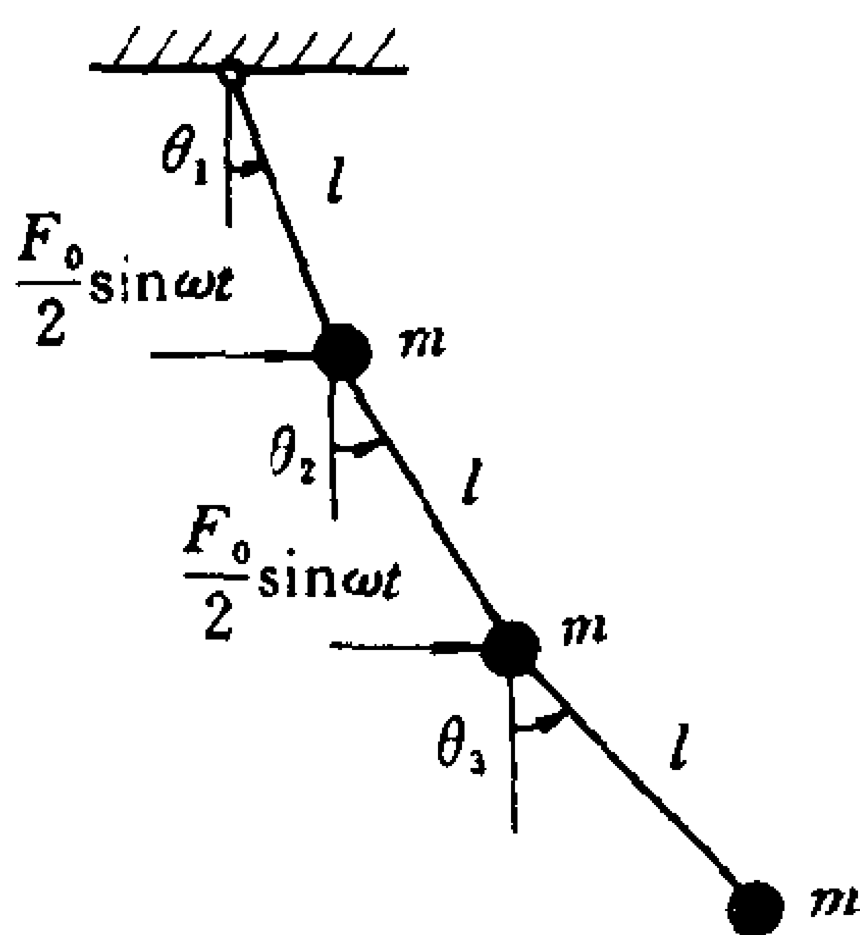
$$p_3 = 2.507\ 8\sqrt{\frac{g}{l}}$$

**5.13** 在上题三节摆中的第一、二两质量上作用有简谐激振力 $\frac{F_0}{2}\sin\omega t$，求系统的稳态响应。其中 $F_0$ 为常量，$\omega^2 = \frac{2g}{5l}$。

答 $\begin{bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\end{bmatrix}=\dfrac{5F_0}{4mg}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\sin\omega t$



题图　5.10



题图　5.12

**5.14**　图示系统中各质量绕轴$o$的转动惯量为$I_1=I_2=I_3=I$，又各弹簧刚度$k_1=k_2=k_3=k$，求系统的固有频率和主振型。

答　$p_1=0,\quad p_2^2=p_3^2=\dfrac{3kR^2}{I}$

$\boldsymbol{x}_1=[1\quad 1\quad 1]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{x}_2=[1\quad 0\quad -1]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{x}_3=[1\quad -2\quad 1]^{\mathrm{T}}$

**5.15**　图示弹簧质量系统中，各质量均为$m$，各弹簧刚度均为$k$。设系统只能沿水平直线运动，求系统各固有频率及主振型。

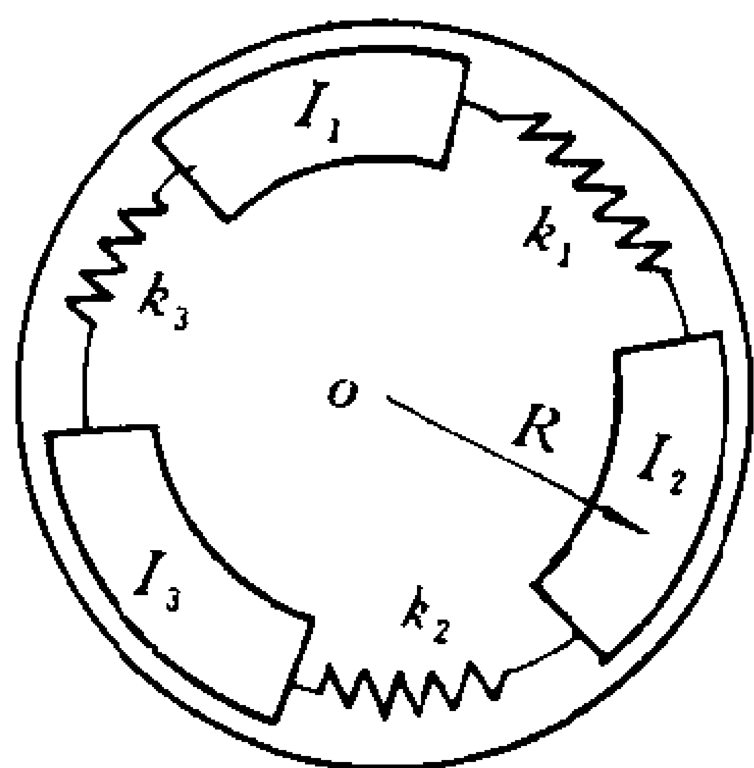
答　$p_1^2=0,\quad p_2^2=(2-\sqrt{2})\dfrac{k}{m},$

$p_3^2=2\dfrac{k}{m},\quad p_4^2=(2+\sqrt{2})\dfrac{k}{m}$

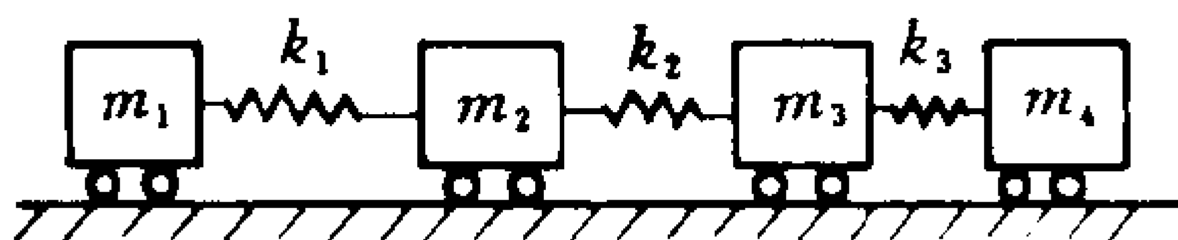
$\boldsymbol{x}_1=[1\quad 1\quad 1\quad 1]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{x}_2=[1\quad 0.414\quad -0.414\quad -1]^{\mathrm{T}}$

$$x_3 = [1 \quad -1 \quad -1 \quad 1]^T$$
$$x_4 = [1 \quad -2.414 \quad 2.414 \quad -1]^T$$




题图 5.14




题图 5.15

**5.16** 设题 5.15 所述系统初始条件为

$$x_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$
$$\dot{x}_0 = [v \quad 0 \quad 0 \quad v]^T$$

求系统的自由振动。

**答** $x = x_1 \dfrac{v}{2} + x_3 \dfrac{v}{2p_3} \sin p_3 t$

**5.17** 设题 5.15 所述系统原来处于静平衡状态，今在其中第一与第四个质量上加以水平方向的阶跃力 $F_1 = F_4 = F$，求系统的响应。

**答** $x = x_1 \dfrac{Ft^2}{4m} + x_3 \dfrac{F}{2mp_3^2}(1 - \cos p_3 t)$

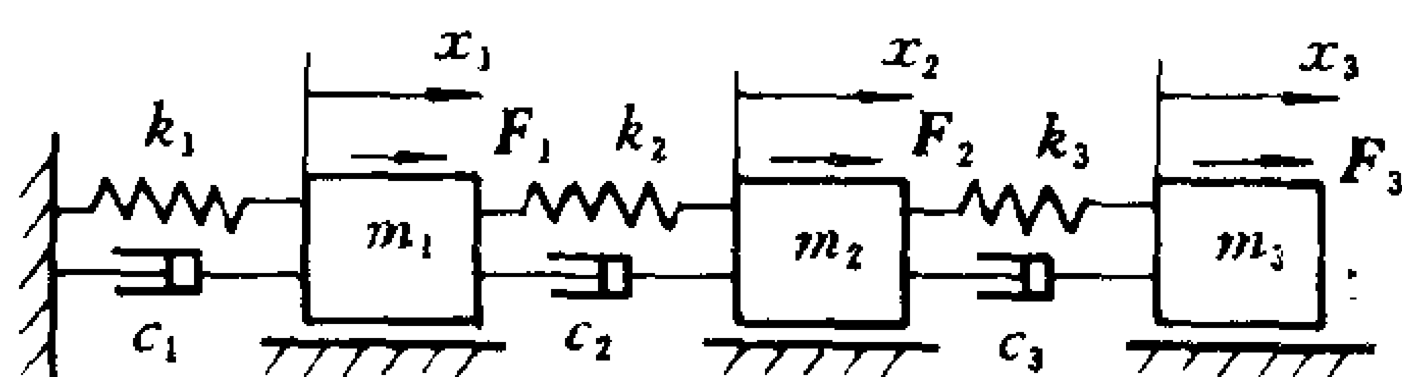
**5.18** 有阻尼弹簧质量系统如图所示。如有 $m_1 = m_2 = m_3 = m, k_1 = k_2 = k_3 = k, F_1 = F_2 = F_3 = F\sin\omega t, \omega = 1.25\sqrt{\dfrac{k}{m}}$。再设各振型阻尼比 $\zeta_i = 0.01$，试求各质量块的稳态强迫振动。

**答** $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{F}{k} \begin{bmatrix} 0.398 \\ 0.717 \\ 0.894 \end{bmatrix} \sin(\omega t - \varphi_1)$$

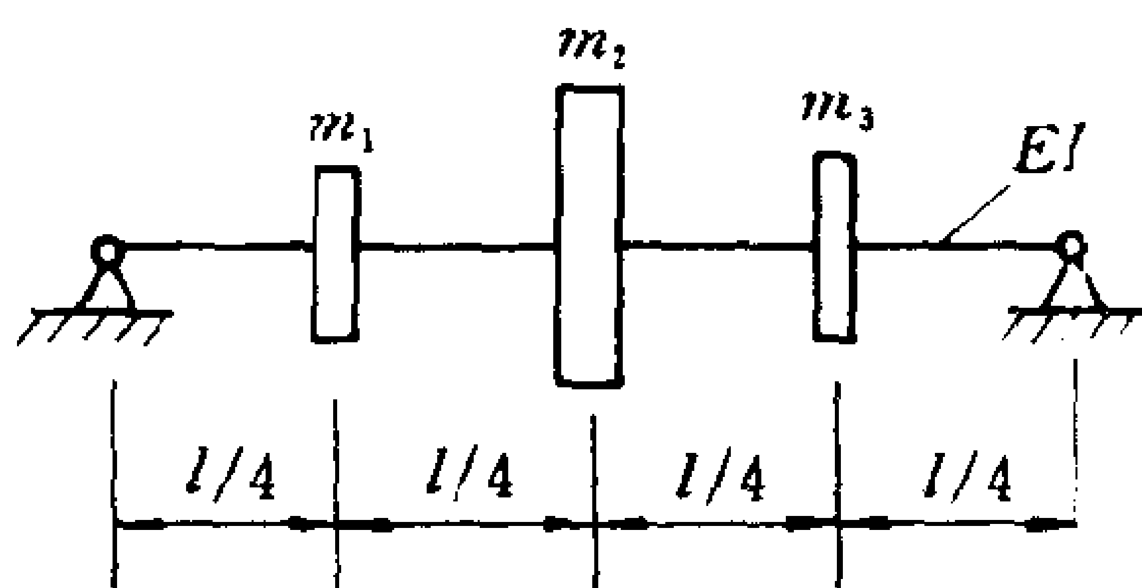
$$+\frac{F}{k}\begin{bmatrix}10.896\\4.849\\-8.737\end{bmatrix}\sin(\omega t-\varphi_2)$$

$$+\frac{F}{k}\begin{bmatrix}0.064\\-0.080\\0.035\end{bmatrix}\sin(\omega t-\varphi_3)$$

$$\varphi_1=179°31'58'',\quad \varphi_2=103°30'28'',\quad \varphi_3=1°31'54''$$




题图　5.18




题图　5.19

**5.19**　在图示轴系模型中，轴可看做均匀简支梁，其截面弯曲刚度为 $EI$，轴长为 $l$，轴本身重量可略去不计。轴上各集中质量为

$$m_1=m,\quad m_2=4m,\quad m_3=2m$$

试用两种形式的瑞利能量法求系统的基频。

**5.20**　长度为 $2l$ 的均匀悬臂梁如图所示。设梁截面弯曲刚度为 $EI$，在梁的中点与末端各载有集中质量 $2m$ 与 $m$，梁本身质量可略去不计。试用传递矩阵法求系统的固有频率与振型。

**答**　$p^2 \doteq 0.31\, EI/ml^3,\quad 8.12\, EI/ml^2$

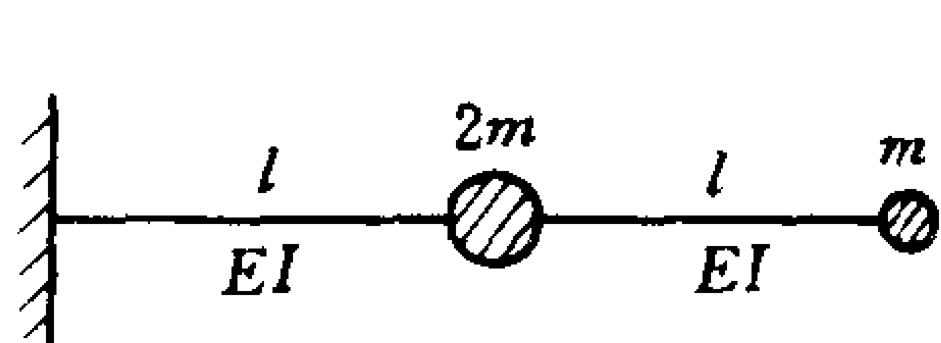
**5.21**　设有题图 5.21 所示固支-自由扭振轴系。(1) 用两种能量法估算系统的基频，假设振型可取为

$$\boldsymbol{x}=[0.4\quad 0.7\quad 0.9\quad 1]^{\mathrm{T}}$$

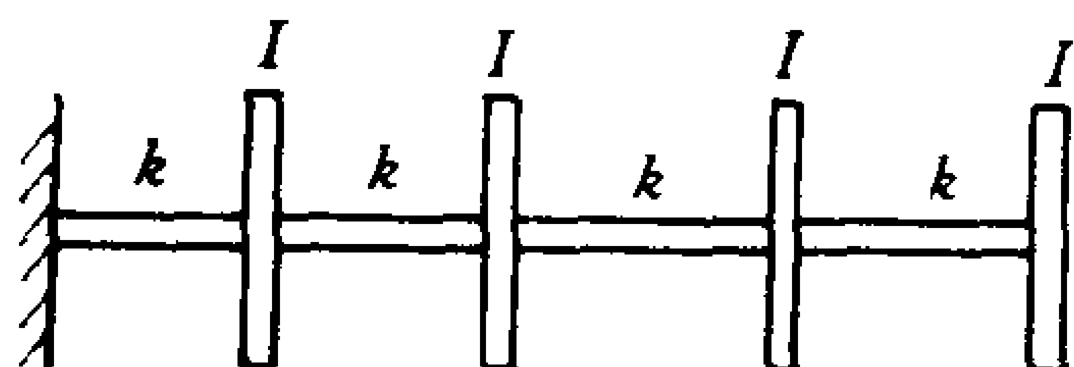
(2) 用两种里兹法计算系统前 2 阶频率，假设模态可取为

$$\psi_1 = [0.25 \quad 0.5 \quad 0.75 \quad 1]^T$$

$$\psi_2 = [0.06 \quad 0.25 \quad 0.56 \quad 1]^T$$

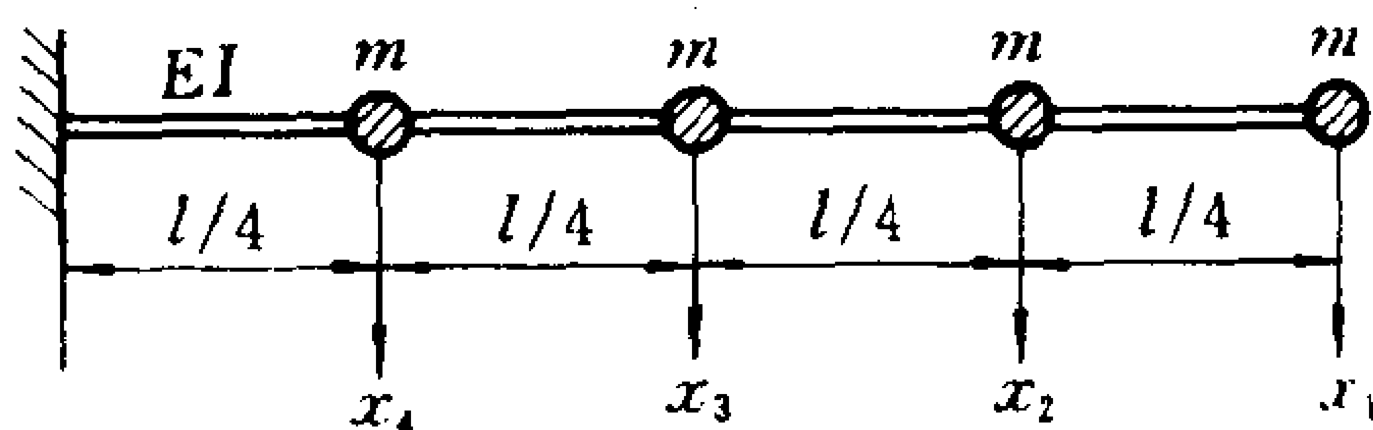



题图　5.20




题图　5.21

**5.22**　考察图示梁系模型的弯曲振动。其中无重均匀悬臂梁长为$l$,截面弯曲刚度为$EI$,沿梁长等间距安装四个集中质量$m$。(1)用两种能量法估算系统的基频。假设振型可取为




题图　5.22

$$\boldsymbol{x} = [1 \quad 0.66 \quad 0.34 \quad 0.1]^T$$

(2) 用两种里兹法计算系统前2阶频率,假设模态可取为

$$\psi_1 = [1 \quad 0.56 \quad 0.25 \quad 0.06]^T$$

$$\psi_2 = [1 \quad 0.42 \quad 0.12 \quad 0.015]^T$$

(3) 用矩阵迭代法求系统前2阶频率与振型;(4) 用子空间迭代法求系统前2阶频率与振型。初始迭代振型可选成与(2)中的相同;(5) 用传递矩阵法求系统前2阶频率与振型。

**6.1**　确定张紧弦的自由振动,设初始条件为

$$\dot{y}(x,0) = 0$$

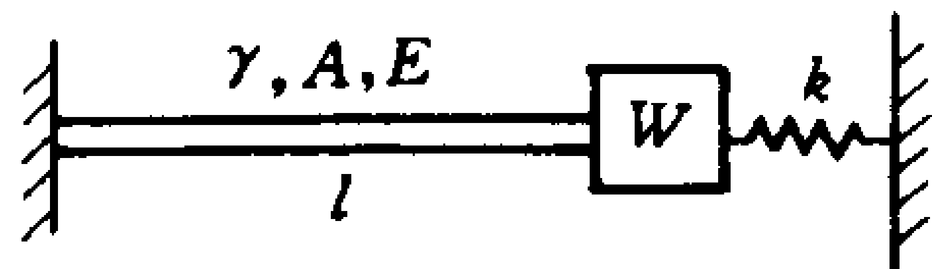
$$y(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2\delta}{l}x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2} \\ 2\delta\left(1 - \dfrac{x}{l}\right), & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

答　$y(x,t)=\frac{8\delta}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}\sin(\frac{n\pi}{l}x)\cos p_n t$

**6.2**　一长为 $l$ 的等直圆杆以匀角速度 $\omega$ 转动，某瞬时左端突然固定，求杆扭转振动的响应。

答　$\theta(x,t)=\frac{8\omega l}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\sin\frac{p_n}{a}x\sin p_n t$，其中 $a=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$，$p_n=\frac{2n-1}{2l}\pi a$

**6.3**　一等直杆左端固定，右端附一重为 $W$ 的重物并和一弹簧相连。求系统纵向振动的频率方程。

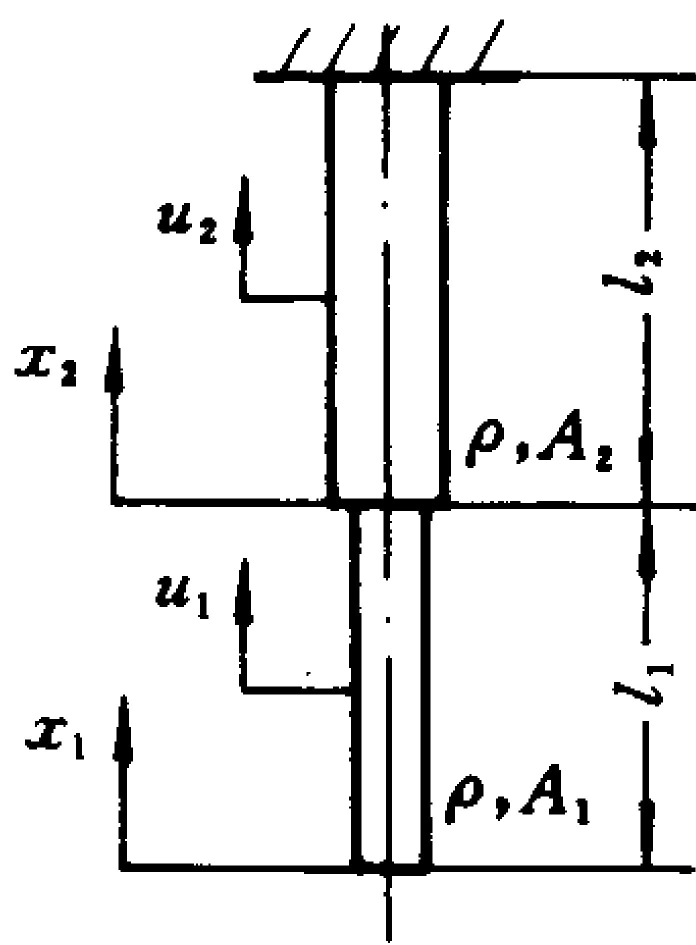


题图　6.3

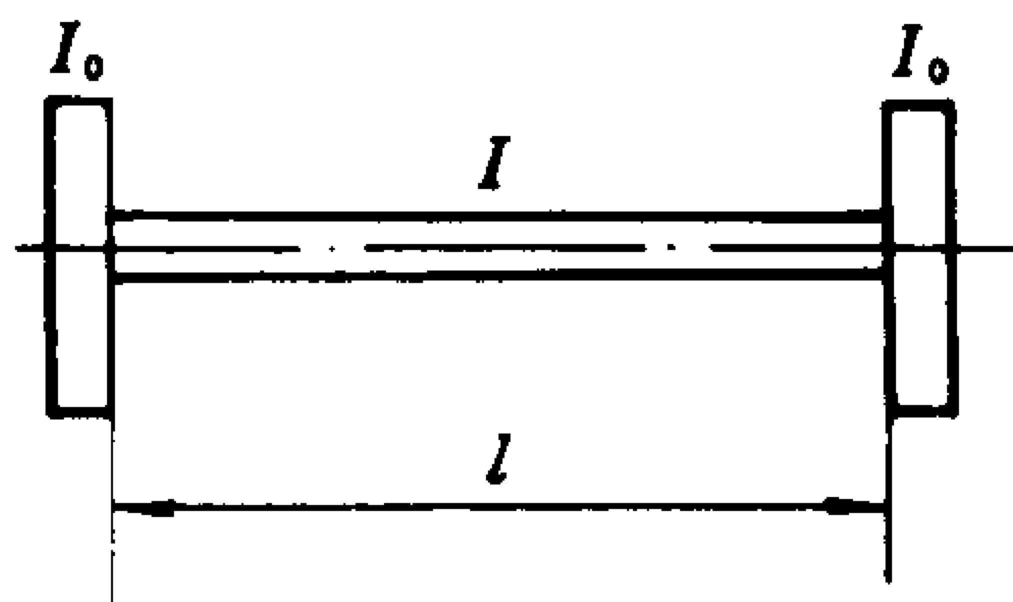
答　$EA\frac{p}{a}\cos\frac{p}{a}l-\frac{W}{g}p^2\sin\frac{p}{a}l+k\sin\frac{p}{a}l=0$

**6.4**　求图示阶梯杆纵向振动的频率方程。

答　$\tan(\frac{p}{a}l_1)\tan(\frac{p}{a}l_2)=\frac{A_2}{A_1}$



题图　6.4



题图　6.5

**6.5**　一等直圆杆两端附有两个相同的圆盘，如图所示。已知杆的长度为 $l$，杆对自身轴线的转动惯量为 $I$，圆盘对杆轴线的转

动惯量为 $I_0$，求系统扭转振动的频率方程。

**答** $$\tan\frac{pl}{a}=\frac{2\left(\frac{I_0}{I}\right)\left(\frac{pl}{a}\right)}{\left(\frac{I_0}{I}\right)^2\left(\frac{pl}{a}\right)^2-1},\quad a=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

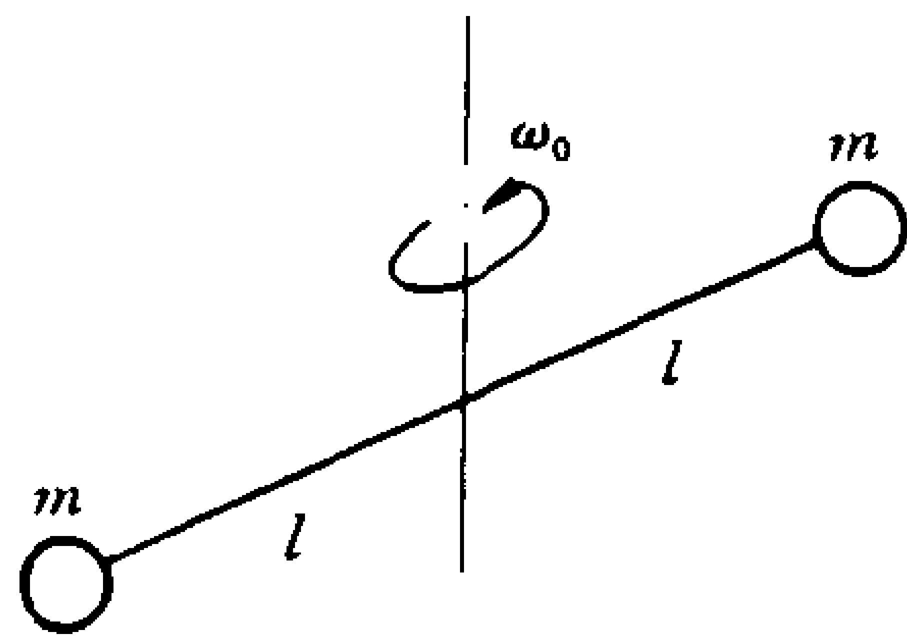
**6.6** 试证明：在基本边界条件下，变截面杆纵向振动振型函数的正交性，即

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^l \rho_{(x)}U_i(x)U_j(x)\mathrm{d}x=0\\&\int_0^l EA(x)\frac{\mathrm{d}U_i(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}U_j(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=0\end{aligned}\right\}i,j=1,2,\cdots;i\neq j$$

**6.7** 试考察下列梁弯曲振动的频率方程：(1) 一端铰支，一端自由的均匀梁；(2) 一端铰支，一端弹簧(刚度为 $k$) 支承的均匀梁；(3) 一端铰支，一端附加集中质量 $m$ 的均匀梁；(4) 一端铰支，一端附加集中质量 $m$ 并受弹簧(刚度为 $k$) 支承的均匀梁。

**6.8** 一特种人造卫星，由钢缆连接两个相等的质量 $m$ 组成，钢缆长 $2l$，单位长度的质量为 $\rho$；整个卫星装置以角速度 $\omega_0$ 绕其质心旋转。假设钢缆中的张力可以看做常数。证明钢缆在旋转平面内的横向振动微分方程为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\rho}{m\omega_0^2 l}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\omega_0^2 y\right)$$




题图 6.8

**6.9** 设简支梁受分布载荷 $W=W_0\sin\frac{\pi x}{l}\sin\omega t$ 的作用。求梁的强迫振动。

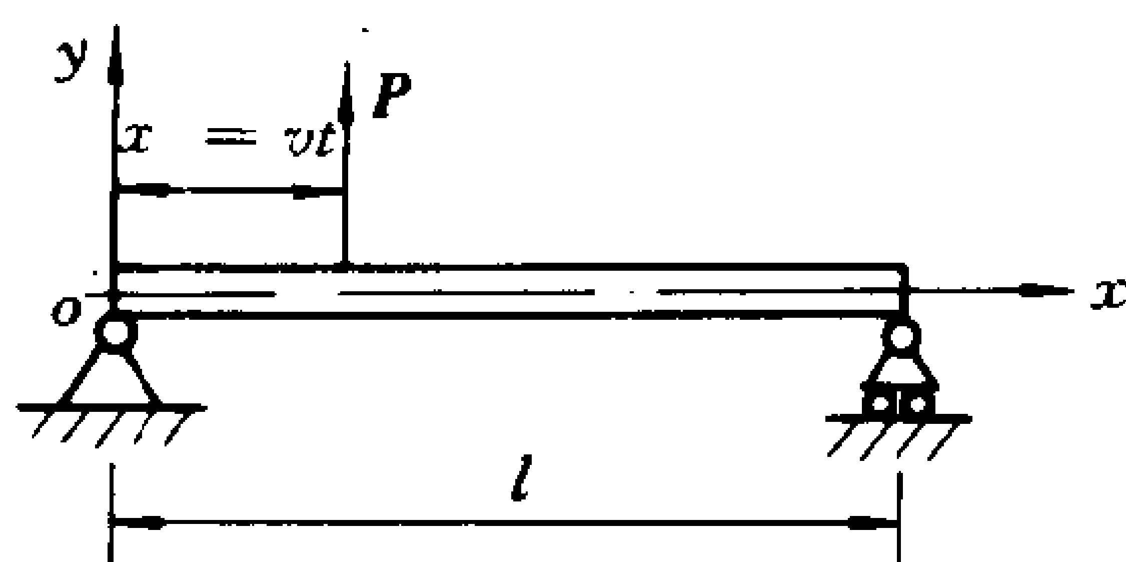
**答** $$y=\frac{W_0 l^4}{\pi^4 EI}\cdot\frac{\sin\omega t}{1-\frac{W^2 l^4}{\pi^4 a^2}}\cdot\sin\frac{\pi x}{l}$$

**6.10** 一简支梁受到一集中力 $P$ 的作用，此力以等速 $v$ 从左向右移动，试求其响应。设初瞬时力 $P$ 在梁的左端。

**答**　$$y(x,t)=\frac{2P}{\rho l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{p_n^2-(\frac{n\pi v}{l})^2}[\sin\frac{n\pi v}{l}t-\frac{v}{a}(\frac{l}{n\pi})\sin p_n t]$$

**6.11**　设有铰支-自由梁，其铰支端有横向位移 $y_0\sin\omega t$。试证明铰支端与自由端($x=l$)的振幅比为

$$\frac{y_0}{y_l}=\frac{\mathrm{sh}\beta l\cos\beta l-\mathrm{ch}\beta l\sin\beta l}{\mathrm{sh}\beta l-\sin\beta l}$$



题图　6.10

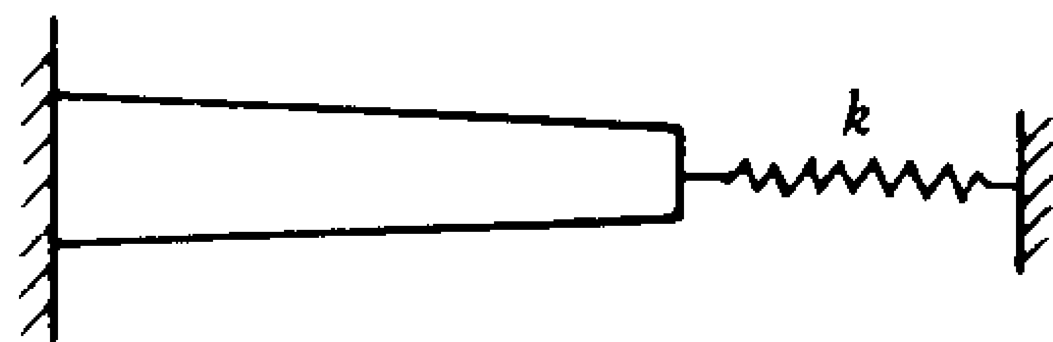
**6.12**　试导出半径为 $a$，周边固定的圆膜的频率方程。

**7.1**　图示变截面杆，其截面变化规律为

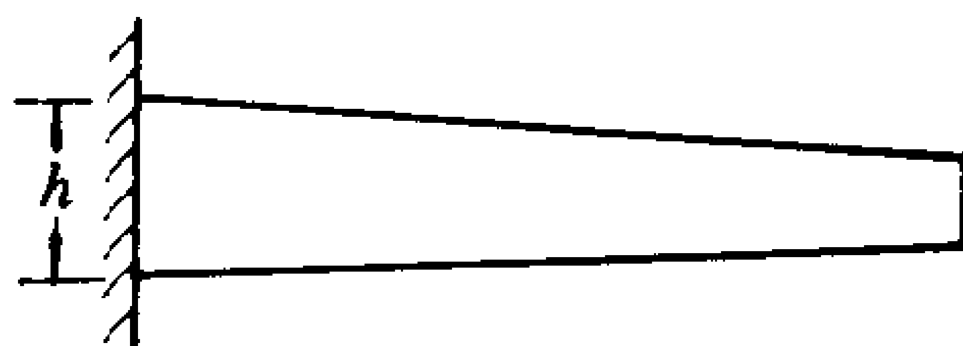
$$m(x)=\frac{6}{5}m(1-\frac{1}{3}\frac{x}{l})$$

$$EA(x)=\frac{6}{5}EA(1-\frac{1}{3}\frac{x}{l})$$

试用假设模态法求前 2 阶固有频率与振型函数。



题图　7.1



题图　7.2

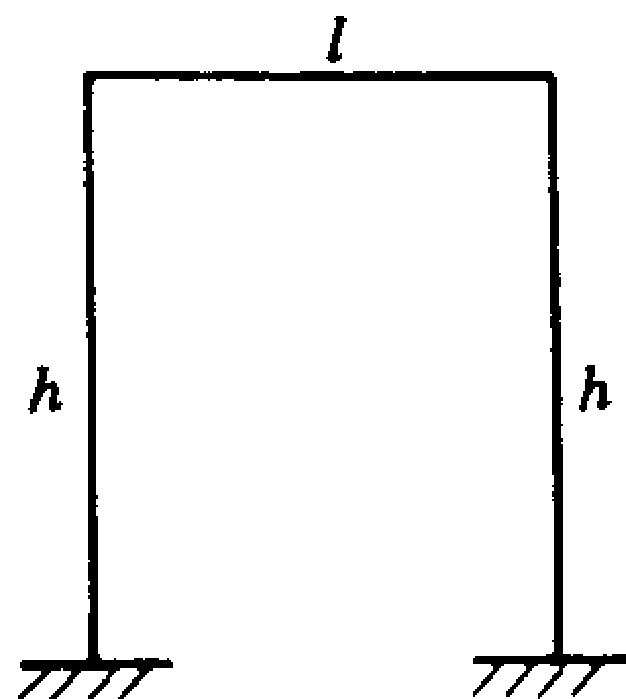
**7.2**　设有单位厚度的楔形梁，一端固定，一端自由，其截面变化规律为

$$A(x)=[h(1-\frac{x}{2l})]$$

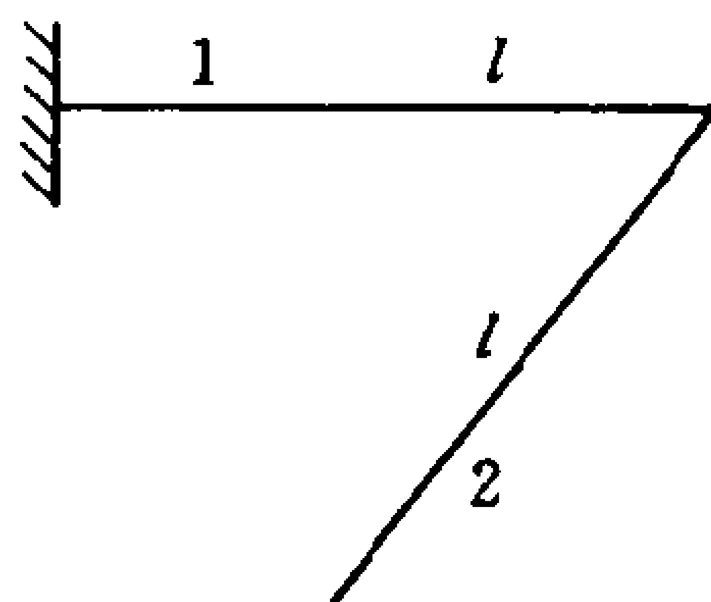
$$I(x)=\frac{h^3}{12}(1-\frac{x}{2l})^3$$

试用假设模态法求前 2 阶固有频率和振型函数。

**7.3** 试用模态综合法求图示刚架在自身平面内弯曲振动的前 2 阶固有频率与振型。假设在振动中拐角始终保持为直角。




题图 7.3




题图 7.4

**7.4** 在水平面内弯成直角的圆杆，一端固支，一端自由，考察杆在铅垂面内的弯曲振动，但须考虑杆 1 除弯振外还有扭振，求它的前 2 阶固有频率与振型。

**7.5** 用有限元素法求解下列问题：(1) 将均匀固支梁分成两个相同的元素，求它的弯曲振动基频近似值；(2) 将一端固支、一端自由的均匀圆杆，分成相同的四个元素，求它的前 2 阶扭振频率；(3) 将两端固支的均匀杆分成四个相同的元素，求它的前 2 阶纵振频率。

# 参 考 书 目


1 Meirovitch L. Computational methods in structural dynamics. Alphen ann den Rijn, The Netherlands: Sijthoff & Noordhoff, 1980

2 Craig R R, Jr. Structural dynamics —— an introduction to computer method. New York: John Wiley & Sons, 1981

3 Ewins D J. Model testing —— theory and practice, New York: John Wiley & Sons, 1984

4 Nashif A D, Jones D I G, and Henderson J P. Vibration damping. New York: John Wiley & Sons, 1985

5 Brogan W L. Modern control theory, 2nd Ed.. Englewood cliffs. New Jersey: Prentice-Hall, 1985

6 Meirovitch L. Elements of vibratioin analysis, 2nd Ed.. New York: McGraw-Hill, 1986

7 Newland D E. Mechanical vibration analysis and computation. New York: Longman Scientific and Technical, 1989

8 Inman D J. Vibration with control, measurement, and stability. Englewood cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1989

9 Meirovitch L. Dynamics and control of structures. New York: John Wiley & Sons, 1990

10 Soong T T. Active structural control: theory and practice. New York: Longman Scientific and Technical, 1990

11 Shabana A A. Theory of vibration, V. Ⅰ and Ⅱ. New York: Springer-Verlag, 1991

12 Argyris J, Mlejnek H P. Dynamics of structures. New York: Elsevier Science Publishers, 1991

13 Kelly S G. Fundamentals of mechanical vibrations. New York: McGraw-Hill, 1993

14 Korenev B G, Reznikov L M. Dynamic vibration absorbers: theory and

technical applications. Chichester: John Wiley & Sons, 1993

15 James W L, et al. Vibration of mechanical and structural systems, 2nd Ed.. New York: Harper Collins, 1994

16 季文美,方同,陈松淇．机械振动．北京:科学出版社,1985

17 胡海昌．多自由度结构固有振动理论．北京:科学出版社,1987

18 吴淇泰．振动分析．杭州:浙江大学出版社,1989

19 戴冠中,佟明安．现代控制理论导论．北京:国防工业出版社,1989

20 (美)哈里斯 C M,克雷德 C E．冲击和振动手册．众师译．北京:科学出版社,1990

21 杨景义,王信义．试验模态分析．北京:北京理工大学出版社,1990

22 王彬主编．振动分析及应用．北京:海潮出版社,1992

23 师汉民等．机械振动系统——分析、测试、建模、对策(上、下册)．武汉:华中理工大学出版社,1992

24 王文亮等．结构动力学．上海:复旦大学出版社,1993

25 顾仲权,马扣根,陈卫东．振动主动控制．北京:国防工业出版社,1997

[ＧｅｎｅｒａｌＩｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ]
书名＝振动理论及应用
作者＝方同　薛璞著
页数＝３６４
ＳＳ号＝１０１５２８７３
出版日期＝１９９８年０５月第１版